

1. はしがき

はりの横倒れ座屈に関する研究は古くから多くの研究者により研究され、非弾性域における理論的、実験的研究も多く行なわれてきた。しかし、これらの研究においては暗黙のうちに座屈直前において、荷重面外は勿論、荷重面内においても真直であるという仮定がなされている。座屈直前におけるはり実際はすでにたわんでおりもはや真直であると仮定することはできない。また、実際の構造物では初期たわみがあり、キャンバーをつけたりする。本研究においては、はりの両端に大きさが等しく、逆向きの曲げモーメントが作用する場合の弾塑性横倒れ座屈強度と、はりの残留応力をも考慮して検討を行なった。

2. 理論解析

はりの曲げモーメントは軸線によって一定であるのではりのたわみ曲線は円弧となる。支点 A より軸線によって距離 θ の点 D での座標を図-1(a) のようにとり、又軸および子軸方向の変位を u および v とする。図-1(b) ははり断面の座屈前および座屈後の変形状態を示したもので、 φ は断面のねじれ角を示している。

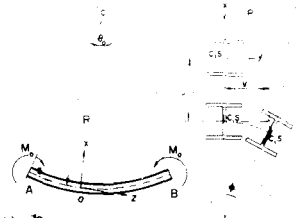


図-1

図-1(a)の座屈前のつり合状態から、面外への曲げねじれ変形を起した状態に移行する際の系全体のポテンシャルエネルギーは

$$W = \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} EI_x \left(\varphi - \frac{d^2 v}{d\theta^2} \right)^2 d\theta + \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} \right)^2 d\theta + \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} EC_w \left(\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \frac{d^2 v}{d\theta^2} \right)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} 2M_0 \frac{d^2 v}{d\theta^2} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta + \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} \bar{K} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 d\theta \quad (1)$$

ここに、 $\bar{K} = \int_A \sigma^2 dA$ であり、 σ は断面中に作用する応力度、 A はせん断中心から考えている点までの距離を、積分は断面全体について行うことを示している。

変分法におけるオイラーの微分方程式より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (EI_x + \frac{EC_w}{R^2}) \frac{d^4 v}{d\theta^4} - GK \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \varphi}{d\theta^4} + (RM_0 - EI_x - GK) \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} &= 0 \\ \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 v}{d\theta^4} + (RM_0 - EI_x - GK) \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \varphi}{d\theta^4} - (GK + \bar{K}) \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + EI_x \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

この連立微分方程式の一般解は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A_0 + B_0 \theta + (A_1 \sin \lambda_1 \theta + B_1 \cos \lambda_1 \theta) + (A_2 \sin \lambda_2 \theta + B_2 \cos \lambda_2 \theta) + (A_3 \sin \lambda_3 \theta + B_3 \cos \lambda_3 \theta) \\ \varphi &= \Phi_1 (A_1 \sin \lambda_1 \theta + B_1 \cos \lambda_1 \theta) + \Phi_2 (A_2 \sin \lambda_2 \theta + B_2 \cos \lambda_2 \theta) + \Phi_3 (A_3 \sin \lambda_3 \theta + B_3 \cos \lambda_3 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 λ_1^2, λ_2^2 および λ_3^2 は次式の根であり、かつ相異なる実根である。

$$\beta \lambda^6 + \{ \alpha - 2\beta + 2m\beta + \delta(1+\beta) \} \lambda^4 + \{ \beta - 2\alpha + 2m + 2\delta m + \alpha\delta - m^2 \} \lambda^2 + \alpha = 0 \quad (4)$$

また、 $\Phi_i (\lambda = 1, 2, 3)$ は次式のように与えられる。

$$\Phi_2 = \frac{(m-1-\alpha) - \beta \lambda_2^2}{(1+\beta) \lambda_2^2 + \alpha} \quad (5)$$

ここに、 $\alpha = \frac{GK}{EI_x}$, $\beta = \frac{C_w}{EI_x R^2}$, $m = \frac{KM_0}{EI_x}$, $\gamma = \frac{\bar{K}}{EI_x}$ の無次元量である。

式(3)に含まれる8個の積分定数 A_i , B_i ($i=0, 1, 2, 3$) を定める8個の境界条件式は A_i , B_i の一次の同次式で横座屈が存在するためには A_i , B_i の行列式の値が0でなければならない。

$$|D| = \theta_0 \sin \lambda_1 \theta_0 \sin \lambda_2 \theta_0 \sin \lambda_3 \theta_0 \left[\lambda_0 \lambda_1 \theta_0 (\theta_2 - \theta_1) + \lambda_1 \lambda_2 \theta_0 (\theta_3 - \theta_1) + \lambda_1 \lambda_3 \theta_0 (\theta_2 - \theta_3) \right] = 0 \quad (6)$$

より、 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ であるから座屈条件式は $\sin \lambda_i \theta_0 = 0$ 、すなわち $\lambda_i = \frac{n\pi}{L} = \frac{m}{L}$ となる。式(4)にこの値を代入して m に関する次の2次方程式を得る。

$$\left(\frac{m}{L}\right)^4 m^2 - 2 \left\{ \beta \left(\frac{m}{L}\right)^2 + 1 + \alpha \right\} \left(\frac{m}{L}\right)^2 m - \left\{ \beta \left(\frac{m}{L}\right)^6 + (\alpha - 2\beta + \gamma + \beta \gamma) \left(\frac{m}{L}\right)^4 + (\beta - 2\alpha + \alpha \gamma) \left(\frac{m}{L}\right)^2 + \alpha \right\} = 0 \quad (7)$$

これを解いて

$$M_{cr} = \frac{EI_x}{R} \left\{ \left\{ \frac{C_w}{EI_x} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{GK}{EI_x} + 1 \right\} \pm \sqrt{\left\{ \frac{C_w}{EI_x} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{GK}{EI_x} + 1 \right\}^2 + \frac{C_w}{EI_x R^2} \left\{ \left(\frac{n\pi R}{L}\right)^4 + \left(\frac{\bar{K}}{EI_x} - 2\right) \left(\frac{n\pi R}{L}\right)^2 + 1 \right\} + \frac{GK}{EI_x} \left\{ \left(\frac{n\pi R}{L}\right)^2 + \left(\frac{\bar{K}}{EI_x} - 2\right) + \left(\frac{L}{n\pi R}\right)^2 \right\} + \frac{\bar{K}}{EI_x} \left(\frac{n\pi R}{L}\right)^2} \right\} \quad (8)$$

この式において $R \rightarrow \infty$ とすると直梁の座屈モーメントの次式が得られる。

$$M_{cr} = \pm \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left\{ E^2 C_w I_x \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + (GK + \bar{K}) EI_x \right\}} \quad (9)$$

3. 数値計算

非弾性域における断面の諸係数は図-2に示すような Sectional Method によった。断面図心におけるひすみ ϵ_c を適当に与え Trial and Error で $\sum \sigma dA = 0$ となるようにひすみ

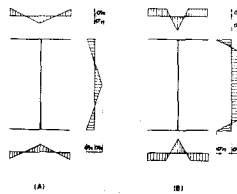


図-3

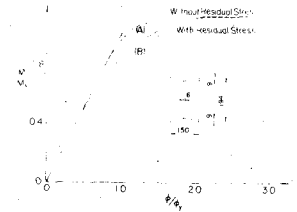


図-4

分布を求め、これより応力分布を決定することができ、数値的に断面の諸係数を決定することができ。図-3に示す2つの残留応力の Pattern について図-4は曲げモーメント曲率の関係を図-5~図-8は曲げモーメントと EI_x , C_w/GK , $1 - \int \sigma^2 dA / GK$ および断面中心の位置を示したものである。図-9はこれらの値を用いた座屈曲線を示す。

本研究について御指導下さいました金沢大学喜久敏教授、名古屋大学福本晴士助教授に感謝します。

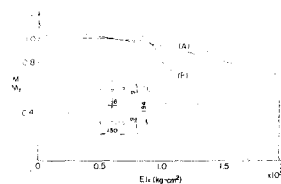


図-5

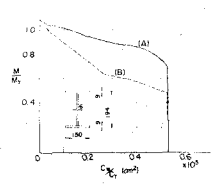


図-6

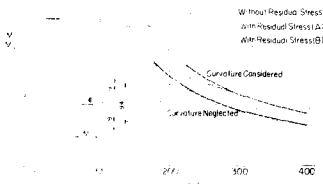


図-9

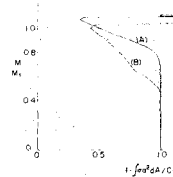


図-7

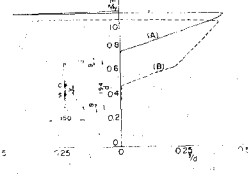


図-8