

岐阜高専 正員 ○渡部 卓郎  
岐阜高専 正員 鎌田 相互

## 1. はしがき

列車の繰り返し衝撃荷重による軌道の強さは、その道床・路盤に著しく左右され易いと従来からしばしばいわれてきているところである。したがって軌道の強化あるいは列車の高速化をはかるためには、道床・路盤の動力学的な研究を行ない、道床破壊機構の究明と路盤強化の対策を解明しなければならない。しかるに軌道の動力学的現象を理論的に取り扱うことは相当複雑になるものと考えられる。そこでまず過去になされた研究をみると、多くは実軌道における測定結果をもとにしてできるだけ簡単化した軌道の力学モデルを想定し、これに対して理論的な考察を進めているようである。

## 2. 理論式の考え方

現地実験における実験結果を考察するにあたって簡単のため一軌道の振動を弾性基礎上にある両端単純支持のはりが、走行荷重を受ける場合の振動問題として考える。いま図-1 に示すごとくレールを弾性基礎上にある単純はりと考え、左端に原点をとってレール長手方向を  $x$  軸とし右向きに正、沈下を  $y$  として上方を正とする。いま  $E$ : はりの弾性係数,  $I$ : はりの水平中立軸に対する断面2次モーメント,  $\rho$ : 基礎係数(道床・路盤を単位量だけ圧縮するに要するはりの単位長さあたりの荷重),  $\gamma$ : はりの単位体積あたりの重量,  $l$ : はりの長さ,  $g$ : 重力加速度 とすれば、このはりの振動の微分方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho y = - \frac{A \gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

で与えられる。いま自由振動を

$$y = X(A \cos pt + B \sin pt) \quad (2)$$

とおき、これを式(1)に代入すると、つぎの正規関数  $X$  に関する方程式がえられる。

$$EI \frac{d^4 X}{dx^4} + \rho X = \frac{A \gamma p^2}{g} X \quad (3)$$

ここで両端単純支持なることを考慮して  $X_i = \sin \frac{i\pi x}{l}$  とおけば  $X_i$  はこの場合の境界条件をすべて満足する。これを式(3)に代入すると

$$p^2 = \frac{EI \gamma \pi^4}{A \gamma l^4} (i^4 + \frac{\rho l^4}{EI \pi^4}) = \frac{\alpha^2 \pi^4}{l^4} (i^4 + \beta) \quad (4)$$

ただし  $\alpha^2 = EI \gamma / A \gamma$ ,  $\beta = \rho l^4 / EI \pi^4$ 。したがって振動数  $f_i$  は

$$f_i = \frac{p_i}{2\pi} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EI \gamma}{A \gamma} (i^4 + \frac{\rho l^4}{EI \pi^4})} = \frac{\pi i^2}{2l} \sqrt{\frac{EI \gamma}{A \gamma} (1 + \frac{\rho l^4}{EI \pi^4 i^2})} \quad (5)$$

となる。ここで  $(\pi i^2 / 2l) \sqrt{EI \gamma / A \gamma}$  は弾性基礎のない通常の両端単純支持はりの自由振動数であるから  $\sqrt{(1 + \rho l^4 / EI \pi^4 i^2)}$  は弾性基礎のあることに対する補正係数とも考えられる。このはりの自由振動の一般解は周知のとおり次式で与えられる。

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \quad (6)$$

ここで  $A_i, B_i$  は初期条件より定まる定数である。つぎにこのはりに強制振動を与えるには、時間関数を一般座標  $g_i$  で表わすことにすれば、たわみ  $y$  は次式となる。

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (7)$$

いまこの場合の位置エネルギー  $V$  と運動エネルギー  $T$  は正規関数  $X_i = \frac{i\pi x}{l}$  が直交性を有することを考慮して計算を進めるとつぎのごとくなる。

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{EI}{2} \frac{\pi^2}{l^3} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{EI\pi^2}{4l^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q_i^2 + \frac{k l}{4} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^2 \quad (8)$$

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{A\gamma}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2 \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i^2 \quad (9)$$

つぎに一般力を  $Q_i$  とすると Lagrange の方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (10)$$

で表わされるので式(10)に式(8), 式(9)を代入すると, つぎの式(11)が求まる。

$$\frac{\gamma A l}{2g} \ddot{q}_i + \frac{EI\pi^2}{2l^3} q_i + \frac{k l}{2} q_i = Q_i \quad (11)$$

したがって式(4)を用いてつぎの式(12)がえられる。

$$\ddot{q}_i + p_i^2 q_i = \frac{2g}{A\gamma l} Q_i \quad (12)$$

ここで式(12)の一般解は定数変化の法により次式で与えられている。

$$q_i = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t + \frac{2g}{A\gamma l} \frac{1}{p_i} \int_0^t Q_i \sin p_i (t-\tau) d\tau \quad (13)$$

いま左端より距離  $c$  の点で加振力  $P = P_0 \sin \omega t$  がはりに作用する場合について考える。このとき

$$Q_i = P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \omega t \quad (14)$$

と置いて式(13)に代入し外力による振動だけを考えたと

$$q_i = \frac{2g}{\gamma A} P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \left\{ \frac{l^3}{\pi^2 \alpha^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^4} \sin \omega t - \frac{\omega}{l p_i (p_i^2 - \omega^2)} \sin p_i t \right\} \quad (15)$$

いま式(15)を式(7)に代入すると

$$y = \frac{2g P_0 l^3}{\gamma A} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \omega t}{\pi^2 \alpha^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^4} - \frac{\omega \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t}{l^2 p_i (p_i^2 - \omega^2)} \right\} \quad (16)$$

さらに式(16)より加速度を求めると

$$\ddot{y} = \frac{2g P_0 l^3}{\gamma A} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{-\omega^2 \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \omega t}{\pi^2 \alpha^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^4} - \frac{-p_i \omega \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t}{l^2 (p_i^2 - \omega^2)} \right\} \quad (17)$$

いまレールスパン中点に荷重が作用したとき, その点に注目すると  $c=l/2$  でかつ  $x=l/2$  とおく。また  $\sin p_i t \leq \pm 1$ ,  $\sin \omega t \leq 1$  であり, いま振幅のみに注目すると一般に  $\omega = 2\pi(1 \sim 10)$   $\text{sec}^{-1}$ ,  $p_i = 2\pi(60 \sim 80) \text{sec}^{-1}$  である。すなわち  $p_i \geq p_1 > \omega$  であるから式(17)の第2項は第1項より大きい。したがって式(17)の第1項を第2項に対して無視すると次式を得る。

$$\ddot{y} = \frac{2g P_0 l^3}{\gamma A} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{p_i \omega \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t}{\pi^2 \alpha^2 (i^2 + \beta) - \omega^2 l^4} \right\} \quad (18)$$

したがって固有振動数 30 c/s 程度の加速度計で測定された記録の波形は, 軌道の自由振動による加速度が卓越しているとみなすことができる。このことは道床用振動加速度計で測定される振動数は, 列車の強制力, 速度などに無関係なほぼ一定値であるといういままでの実測結果とほぼ一致する。

なお数値計算例については講演時にゆずる。