II－13　　粘性を考慮した場合の内部波について

名古屋工業大学　正員　細井正延
同　大学院　○野口正人

1．まえがき

密度の異なった流体が共存するところでの、混合機構を明らかにするために、予備段階として、淡水と塩水とが二成層をなしているところに、風波等の外力が働いた場合に、内部波がどのような挙動を取るかを調べる。そこで、まず問題になるのは、表面波と内部波との状態であるが、これらについては、粘性を考慮しない完全流体としての取り扱い[1]や実験的考察[2]が、浜田や椎貝等によってなされている。又、粘性の影響については、無限水深の場合に対して、浜田[3]がいくらかの考察を加えている。しかし、ポテンシャル論では、実際の現象を十分表わすことは出来ないし、粘性を考えた前記論文も、無限水深のもので、表面と内部境界面との関係を調べるに際しては、十分とは言えない。そこで、有限水深の場合に、粘性を考慮して、表面波と内部波との関係を求め、且つ、それぞれの波の性質について調べる。

2．基礎方程式と計算結果

ここでは、表面波を考えにいれた場合について、波速を求め、表面波と内部波との関係式を誘導する。なお、上層下層とも、流速はないものとし、以下の計算は、一次近似の範囲内において行うものとする。基礎方程式としては、非線形項を省略したNavier-Stokesの運動方程式及び連続式を、それぞれ上層流体及び下層流体に対して、次のようにたてる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_j}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_j}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial x}+\nu_j\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\right)\\&\frac{\partial v_j}{\partial t}=-g-\frac{1}{\rho_j}\cdot\frac{\partial p_j}{\partial y}+\nu_j\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2}\right)\\&\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}=0\\&\qquad\qquad j=1,2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

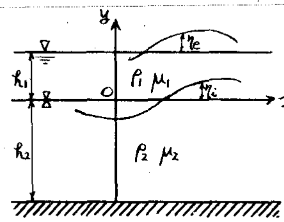


図-1

各層の速度の水平成分を u_j，鉛直成分を v_j，圧力を p_j $(j=1,2)$ とし、これらを周期解と非周期解とに分けると、(1)式を使って、次のようになる[4]。

$$\left.\begin{aligned}&u_j=\left\{-\frac{1}{c_0}\left(A_je^{ky}+B_je^{-ky}\right)+\frac{im_j}{k}\left(C_je^{m_jy}-D_je^{-m_jy}\right)\right\}e^{ik(x-c_0t)}+a_jy+b_j\\&v_j=\left\{\frac{i}{c_0}\left(A_je^{ky}-B_je^{-ky}\right)+\left(C_je^{m_jy}+D_je^{-m_jy}\right)\right\}e^{ik(x-c_0t)}+c_j\\&p_j/\rho_j=-\left(A_je^{ky}+B_je^{-ky}\right)e^{ik(x-c_0t)}-gy+d_j\\&\qquad\qquad j=1,2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

ここに、c_0は波速であり、$A_j, B_j, C_j, D_j, a_j, b_j, c_j, d_j$ $(j=1,2)$は積分定数である。

次に表面波形を $\eta_e=R_e\{A_e e^{ik(x-c_0t)}\}$、内部波形を $\eta_i=R_e\{A_i e^{ik(x-c_0t)}\}$ として、表面$(y=h_1+\eta_e)$、界面$(y=\eta_i)$ 及び底$(y=-h_2)$で境界条件式として、次の諸式を満足させる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\eta_e}{\partial t}+u_1\frac{\partial\eta_e}{\partial x}=v_1 &&(y=h_1+\eta_e\text{で}), &&u_2=0 &&(y=-h_2\text{で})\\&-p_1+2\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial y}=0 &&(\quad〃\quad), &&v_2=0 &&(\quad〃\quad)\\&\mu_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=0 &&(\quad〃\quad), && &&\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial t}+u_1\frac{\partial\eta_i}{\partial x}=v_1 \quad (y=\eta_i で), \qquad -p_1+2\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial y}=-p_2+2\mu_2\frac{\partial v_2}{\partial y} \quad (y=\eta_i で)$$

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial t}+u_2\frac{\partial\eta_i}{\partial x}=v_2, \qquad \mu_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=\mu_2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \quad (\ \ 〃\ \ )$$

$$u_1=u_2,$$

これらの境界条件式に(2)式の形で$u_j, v_j, p_j\ (j=1,2)$を代入すると、$a_j=b_j=c_j=0\ (j=1,2)$, $d_1=gh_1$, $d_2=\frac{1}{1+\varepsilon}gh_1$, $(\varepsilon=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1})$及び、$A_j, B_j, C_j, D_j\ (j=1,2), A_e, A_i$に関する10個の斉次式[(4)式]が求まる。有限水深の場合の完全流体の速度ポテンシャルからも類推出来るように、粘性流体においても、無限水深でなく、有限水深の取扱いをすると、$kh_1, kh_2, m_1h_1, m_2h_2$ $[m_j^2=k^2-\frac{ikc_0}{\nu_j}]$の双曲線関数が入ってきて、式が非常に複雑になる。一方、(4)式はc_0に関して超越方程式となり、その解析解を見出すことは困難である。そこで、種々の数値に対する数値解を求めるために、(4)式を見掛け上の3次複素係数代数方程式の形で与えると次のようになる。(上下流体の粘性係数μ_1, μ_2が異なる場合については式が非常に煩雑になるので、ここでは、上下両流体の粘性係数がほぼ等しい：$\mu_1=\mu_2=\mu$の場合を記すにとどめる。)

$$B_3c_0^3+B_2c_0^2+B_1c_0+B_0=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$B_3=\frac{\rho_2^2}{\rho_1}\cdot\frac{k^2+m_1^2}{k}\sigma\alpha-\rho_2\left\{\frac{k^2+m_1^2}{k}af(k\sigma-m_2\tau)+2km_1m_2-2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}km_1\sigma+(k^2+m_1^2)\frac{m_2}{k}bf\varphi-(k^2+m_2^2)\frac{m_1}{k}ap\psi\right\}-(\rho_2-\rho_1)\frac{k^2+m_1^2}{k}af\{k(\sigma+m_2)+m_2(\tau+k)+\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}k^2cg\}$$

$$B_2=i\mu\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}(k^2+m_1^2)(k^2+m_2^2)afcg+i\frac{2}{\rho_1}\mu\Big[\rho_1\{-m_1(k^2+m_2^2)(\sigma+m_2)+m_2(k\alpha+m_1\beta)(\tau+k)\}+\rho_2\Big[\frac{\rho_2}{\rho_1}m_1\{m_1(\alpha+m_1)+k(\beta+k)\}\sigma+m_2\varphi(k\delta+m_1\gamma)+m_1\psi(k\gamma+m_1\delta)\Big]+\frac{(\rho_2-\rho_1)^2}{\rho_1}k\{k(\alpha+m_1)+m_1(\beta+k)\}\sigma-(2\rho_2-\rho_1)km_2\{k(\alpha+m_1)+m_1(\beta+k)\}\Big]-i\frac{g}{k}\frac{\rho_2}{\mu}(\rho_2m_1ap\sigma-\rho_1m_1bp\psi+\rho_1m_2af\varphi)$$

$$B_1=g\left[\left\{\rho_1\left(2\tau+\frac{k^2+m_2^2}{k}\right)-\rho_2\cdot\frac{k^2+m_1^2}{k^2}(\tau+k)\right\}bfm_2+\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\left\{\rho_2\left(\frac{k^2+m_1^2}{k^2}\alpha+2m_1\right)\psi-\rho_1\left(\frac{k^2+m_2^2}{k^2}\sigma+2m_2\right)kbf\right\}\right]$$

$$B_0=-i(\rho_2-\rho_1)\frac{1}{\mu}\cdot\frac{g}{k}\left[\frac{g}{k}\{\rho_1af(k\sigma+m_2\tau+2km_2)+\rho_2\delta\psi\}-2\frac{\mu^2}{\rho_1}(k\sigma+m_2\tau+2km_2)(k\delta+m_1\gamma)-2\left(\frac{\mu}{\rho_1}\right)^2\rho_2\{(k^2+m_1^2)(\alpha+m_1)+2km_1(\beta+k)\}\psi\right]$$

ここに $a=\sinh kh_1$, $b=\cosh kh_1$, $c=\sinh kh_2$, $d=\cosh kh_2$, $f=\sinh m_1h_1$, $p=\cosh m_1h_1$, $g=\sinh m_2h_2$, $r=\cosh m_2h_2$
又、$\alpha=kaf-m_1bp$, $\gamma=kap-m_1bf$, $\sigma=kcg-m_2dr$, $\varphi=kcr-m_2dg$であり、これらのkとm_jを入れかえたものが$\beta, \delta, \tau, \psi$。

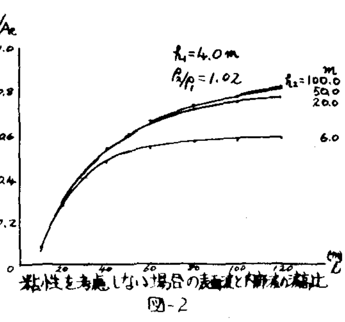
次に界面での力学条件式を除く(4)式より、A_eとA_iとの関係が求まる。

$$A_i=K\cdot A_e \qquad \cdots\cdots(6)$$

Kは一般に複素数であり、$K=\rho e^{i\theta}$と書ける。故に、内部波高と表面波高との間には$|A_i|/|A_e|=\rho$の関係があり、位相θだけ、お互いの波はずれることになる。又、(5)式よりc_0が、$c_0=c_{0R}+ic_{0I}$と求まると、波高は表面及び界面において、$e^{kc_I^{(j)}t}\ (c_I^{(j)}<0)$の割合で時間の経過につれて減衰し、表面波・内部波共、c_{0R}の波速で進行する。

3. 数値計算及び考察

現在計算を実施中であるので、詳しいことを言えないが、この研究により、粘性を考慮した場合には、椎貝が実験より指摘しているように[2]、0又はπと違った位相が、計算により求まる。内部波高と表面波高との比は、圧力変動が起る位置によって異なるが、これらの値や、そして又、減衰の状態も計算で求めることが出来る。これらの計算値が、どの程度妥当なものであるかは、今後、実験により調べるつもりである。なお、ポテンシャル論との比較のために、図-2を挙げておく。数値計算の結果については、講演時に発表する。



粘性を考慮しない場合の表面波と内部波の振幅比

図-2

参考文献：1) 浜田徳一・加藤始 2層流と波，第9回海岸工学講演 2) 椎貝博美・河野二夫：波による塩淡水の混合について，第3回災害科学総合シンポ 3) 浜田徳一 密度流の問題(1)，第13回海岸工学講演会 H. Lamb Hydrodynamics 6th ed. 4) 松梨順三郎 流れと波の共存系の一解法について，第10回水理講演会