漸化有限要素法によるアーチの自由振動

信州大学　学生員　○熊川仁金　正員　夏目正太郎

1. 漸化有限要素法について

本法の漸化有限要素法は一次元の漸化有限要素法と言る．この方法はアーチを数本の部材に分割してこれらの部材の集合体をアーチとみなすわけである．移行演算においては隣接部材間の連続条件式は中間においてすべて同型であるから漸化式となり計算機使用の点からみても能率よいものである．中間の移行演算の結果を補助記憶装置に入れることにより分割数を多くすることは容易である．最終の演算は中間の移行演算と両端の境界条件より振動数を決定する．分割数は収斂をみて決定すればよい．

2. 基本式

アーチの自由振動は面内，面外の自由振動が考えられる．次にこれらの自由振動の基本式を示す．

(I). 面内自由振動.

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \\ F \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EA\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI\lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\mu x & \sin\mu x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\lambda x & \sin\lambda x & \cosh\lambda x & \sinh\lambda x \\ 0 & 0 & -\sin\lambda x & \cos\lambda x & \sinh\lambda x & \cosh\lambda x \\ -\sin\mu x & \cos\mu x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\lambda x & \cos\lambda x & -\sinh\lambda x & -\cosh\lambda x \\ 0 & 0 & -\cos\lambda x & \sin\lambda x & \cosh\lambda x & \sinh\lambda x \end{bmatrix} \mathbf{X}, \tag{1}$$

上式を次のように表わす．

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{X}, \tag{2}$$

(II). 面外自由振動.

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ w \\ T \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI\lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\nu x & \sin\nu x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\lambda x & \cos\lambda x & \sinh\lambda x & \cosh\lambda x \\ 0 & 0 & \cos\lambda x & \sin\lambda x & \cosh\lambda x & \sinh\lambda x \\ -\sin\nu x & \cos\nu x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\lambda x & \sin\lambda x & -\cosh\lambda x & -\sinh\lambda x \\ 0 & 0 & -\sin\lambda x & \cos\lambda x & -\sinh\lambda x & -\cosh\lambda x \end{bmatrix} \mathbf{X}, \tag{3}$$

または

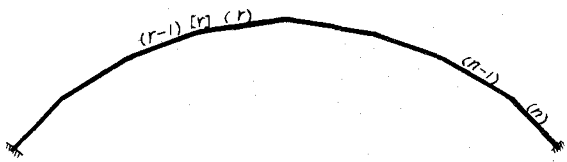
$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{X}, \tag{4}$$

式(1),(3)において

$$\lambda=\sqrt[4]{\frac{\gamma A\omega^2}{EIg}} \qquad \mu=\sqrt[2]{\frac{\gamma A\omega^2}{EAg}} \qquad \nu=\sqrt[2]{\frac{\gamma A\omega^2}{GJg}} \tag{5}$$

式(1),(3),(5)において，u＝軸方向変位，w＝たわみ，θ＝たわみ角，F＝軸力，S＝せん断力，M＝曲げモーメント，ϕ＝ネジリ角，T＝ネジリモーメント，EI＝曲げこわさ，GJ＝ネジリこわさ　EA＝伸びこわさ，γ＝密度，A＝断面積，g＝重力加速度，ω＝円振動数。

3. 移行演算



図－1．アーチ．

中間における隣接部材間($r-1$，r)の移行演算式は，

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{L}_r \mathbf{X}_{r-1}, \tag{6}$$

式(6)をくり返し用いて

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{L}_{n-2} \cdots \mathbf{L}_2 \mathbf{X}_1. \tag{7}$$

4. 境界条件

境界条件は次式で与えられる:

$$\text{左端}\quad \mathbf{B}\mathbf{X}_1 = 0, \qquad \text{右端}\quad \mathbf{B}'\mathbf{X}_n = 0. \tag{8}$$

5. 最終式

式(7)(8)より次式を導く，この式を解くことにより固有値である円振動数ωが求まる．

$$\begin{vmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}'\mathbf{L}_n \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

6. あとがき

漸化有限要素のアーチの自由振動の解法の大きな利点として次の事が言える:

(1)．アーチの形状が円弧でも二次曲線で式そのものは同型でよい，

(2)．変断面でも式は変らない，

(3)．境界条件が異っても式(9)の$\mathbf{B}$，$\mathbf{B}'$を変えるだけですべての境界条件でなりたつ，

以上大きな利点についてのべたが，電算機使用の点からみてもすぐれた解法の一つであると思います．