I−7

演算子法による構造物の振動解析

信州大学　正員　○夏目 正太郎　正員　理博 谷本 勉之助

1. まえがき

構造物の振動をあつかうとき、その挙動には、大なり小なり常に減衰性をともなっているので、解析にあたっても、減衰性を考慮されなければならない。振動の減衰性が何に起因するかを論ずることはさておき、一般になされているように、運動の速度に正比例するものと、内部ひずみ速度に正比例するものとをとりあげることにする。例えば、前者に属するものには、空気をはじめとする流体による表面摩擦の抵抗があろうし、後者には、内部粘性抵抗があろう。したがって、棒の弾性振動で減衰性を考慮するには、それらの抵抗性を入れた微分方程式を立て、その特解を求めれば、問題は解決したことになる。

2. 減衰ある弾性棒

(a) たて振動

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \qquad (1)$$

ここで、γ:密度、g:重力加速度、E:ヤング率、ξ:内部粘性抵抗に関する係数、α:流体の抵抗に関する係数とすれば、(1)の特解は

$$u(x,t) = Y(x)\cdot e^{(+\lambda + i\omega)t} \qquad (2)$$

ここで、$Y(x) = C_1\cos p_1 x + C_2 \sin p_1 x$; $\lambda = -E/\xi \pm\sqrt{(E/\xi)^2 - (\omega^2 + \alpha\cdot g\cdot E/(\gamma\cdot\xi))}$;

$$p_1^2 = \{(\omega^2 - \lambda^2)\cdot\gamma/g - \alpha\cdot\lambda\}/(E + \xi\cdot\lambda)$$

を得る。

(b) たわみ振動

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \xi I\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0 \qquad (3)$$

この中で、β:たわみによる流体の抵抗に関する係数、I:断面2次モーメントとすれば、特解は

$$w(x,t) = X(x)\cdot e^{(+\mu + i\omega)t} \qquad (4)$$

ここで、$X(x) = C_3\cos p_2 x + C_4 \sin p_2 x + C_5 \cosh p_2 x + C_6 \sinh p_2 x$;

$$\mu = -E/\xi \pm\sqrt{(E/\xi)^2 - (\omega^2 + \beta\cdot g\cdot E/(\gamma\cdot A\cdot\xi))}\ ; \quad p_2^4 = \{(\omega^2 - \mu^2)\gamma/g - \beta\cdot\mu\}/(E + \xi\cdot\mu)\cdot I$$

である。

これらからわかるように、$\alpha = \beta = 0$ とすれば $\lambda = \mu$ となり、さらに $\xi = 0$ とすれば、減衰のない場合の弾性振動を与えるものとなる。

3. 骨組構造の振動

骨組構造は何本かの部材が節点に集められ、変形や内力が伝達される。ここでは、曲げと軸力が、

伝達される系として、平面変形を考えるラーメンについて述べることとする。したがって、ねじれ振動に関する項を除外してある。曲げと軸力を生ずるものの基本となる要素は、変形量としては、伸縮、たわみ、たわみ角があり、力学量としては、軸力、曲げモーメント、せん断力があるのでこれらを示せば

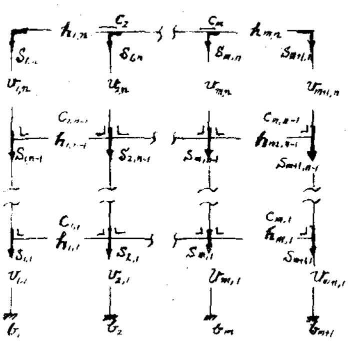
$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & p_2 e^{\mu t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos p_1 x & \sin p_1 x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos p_2 x & \sin p_2 x & \cosh p_2 x & \sinh p_2 x \\ 0 & 0 & -\sin p_2 x & \cos p_2 x & \sinh p_2 x & \cosh p_2 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} F \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 EA e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & -p_2^3 EI e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & -p_2^2 EI e^{\mu t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin p_1 x & \cos p_1 x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin p_2 x & -\cos p_2 x & \sinh p_2 x & \cosh p_2 x \\ 0 & 0 & -\cos p_2 x & -\sin p_2 x & \cosh p_2 x & \sinh p_2 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \qquad (6)$$

となる。

4. 多層、多径間ラーメンの減衰自由振動

移行演算をするために、一般性をもった条件式を立てるには、部材4本集まる節点で組立て、特殊な節点における条件式組は、それから導くことにすればよい。



今最上階から支持点へ向って移行演算するならば、最上階の水平部材の未定係数群を移行演算子にとり、鉛直部材に沿って降下すれば、中間の階層は反覆演算となり、能率よく計算出来、支持点の条件と、最上階水平部材間に残された適合条件により未定係数群を消去することが出来る。その結果、固有振動数方程式を得るのである。

最上階の条件式群を書き出すと

$$V_n Z_n = H_n \Omega \qquad (7)$$

となり、ただちに

$$Z_n = S_n \Omega \qquad (8)$$

とすることが出来る。中間の移行条件式も同様で、

$$V_{s-1} Z_{s-1} = V_s^{\circ} Z_s + Q_{s-1} Y_{s-1} \qquad (9)$$

でこれから、

$$Z_{s-1} = S_s Z_s + L_{s-1} Y_{s-1} \qquad (10)$$

と得るが、ここでは適合条件群があるので、Y_{s-1} を消去し、Z_s にすることが出来る。

適合条件式群は

$$C_{s-1} Y_{s-1} = C_s' Z_s \qquad (11)$$

であり、

$$Y_{s-1} = P_s Z_s \qquad (12)$$

を得て、(10) と (12) から

$$Z_{s-1} = R_s Z_s \qquad (13)$$

の形を得る。Ω を消去するためには、

$$C_m \Omega = 0 \quad , \quad B Z_1 = 0 \qquad (14)$$

の二式が用いられる。この方法では大型の逆マトリクスが不用で、反覆演算が出来るので、電子計算機には便利に解法と云える。