I－4　　Power Methodによる行列の固有値問題の解法への一試案

岐阜大学　工学部　　井上　肇，時実　公生
北海道大学工学部　　宇土沢　光賢

1. まえがき

構造物の振動や座屈の解析の際，行列の固有値を求めることが必要となるが，構造物が複雑になればなるほど，精度を要求すればするほど，行列は高次となり，計算労力は莫大なものとなる。ふつう，高次の行列の固有値問題の解法としては，任意のベクトルを反復してかけてゆく乗べキ法，Jacobi 法 Givens 法　等が多く用いられているが，こゝでは，乗べキ法（Power Method）のもつ性質を吟味し，その性質を利用して，反復の回数を減少させようとするものである。

2. Power Method とその改良のための一試案

たとえば，構造物の振動問題では，行列の固有値問題は次のように現われてくる。

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{x}} + \mathbb{K}\mathbb{x} = 0 \qquad \text{—— 自由振動の運動方程式（}n\text{元）——} \tag{1}$$

こゝで $\mathbb{M}$；Mass Matrix，$\mathbb{K}$；Stiffness Matrix　$\mathbb{x}$：変位ベクトル　$\mathbb{x} = \bar{\mathbb{x}}\cos\omega t$，$\bar{\mathbb{x}}$；位置のみを示すベクトル，$\omega$；円振動数，(1)を変形して，$\mathbb{A} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}$，$\mathbb{I}$；単位行列，$\lambda = \omega^2$　として

$$(\mathbb{A} - \omega^2\mathbb{I})\bar{\mathbb{x}} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \mathbb{A}\bar{\mathbb{x}} = \lambda\bar{\mathbb{x}} \tag{2}$$

n 個の固有値を大きさの順に　$\lambda_n > \lambda_{n-1} \geq \lambda_{n-2} \geq \cdots\cdots \geq \lambda_1$　とし，それらに属する固有ベクトル $\bar{\mathbb{x}}_i$ が求められておれば，次のようにかける。

$$\mathbb{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbb{X} = [\bar{\mathbb{x}}_1, \bar{\mathbb{x}}_2, \cdots\cdots, \bar{\mathbb{x}}_n] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{\Lambda} \tag{3}$$

任意のベクトル $\mathbb{U}_0$ を固有ベクトルに展開して

$$\mathbb{U}_0 = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} = \mathbb{X}\mathbb{C}, \qquad \mathbb{C} = \{c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n\} \tag{4}$$

(4)を(2)に代入すると

$$\mathbb{A}\mathbb{U}_0 = \mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{C} = \mathbb{X}\mathbb{\Lambda}\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i x_{i1} \\ \sum c_i\lambda_i x_{i2} \\ \vdots \\ \sum c_i\lambda_i x_{in} \end{bmatrix} = \lambda_n c_n \begin{bmatrix} x_{n1} + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i/\lambda_n)(c_i/c_n)x_{i1} \\ x_{n2} + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i/\lambda_n)(c_i/c_n)x_{i2} \\ \\ x_{nn} + \sum(\lambda_i/\lambda_n)(c_i/c_n)x_{in} \end{bmatrix} = \lambda_n c_n \mathbb{U}_1 \tag{5}$$

この $\mathbb{U}$ と $\mathbb{A}$ の右からかける演算を k 回くり返すと

$$\mathbb{A}\mathbb{U}_{k-1} = \lambda_n \begin{bmatrix} x_{n1} + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i/\lambda_n)^k(c_i/c_n)x_{i1} \\ x_{n2}+ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \vdots \\ x_{nn}+ \quad \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} = \lambda_n \mathbb{U}_k \tag{6}$$

$\lambda_i/\lambda_n < 1$，かつ $c_n \neq 0$ とすれば，十分大きい k に対して　$(\lambda_i/\lambda_n)^k \ll 1$ であるから

$$\mathbb{U}_k \fallingdotseq \{x_{n1}, x_{n2}, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_{nn}\}, \qquad \mathbb{A}\mathbb{U}_k \fallingdotseq \lambda_n\mathbb{U}_k \tag{7}$$

として，固有値　λ_n と　固有ベクトル　$\mathbb{U}_k$　は定まる。通常，$\mathbb{U}$ の収束の判定条件としては，各要素で　$|d_{jk}| = |u_{j,k} - u_{j,k-1}| < \varepsilon$，　ε；正の小さい数たとえば 10^{-p}　p；正の整数　(8)

$\gamma_i = \lambda_i/\lambda_n$，$\beta_i = c_i/c_n$ とすれば　$d_{jk} = \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i^{k-1}(\gamma_i - 1)\beta_i x_{ij}$，$(j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$　(9)

g_{n-1} は g_{n-2} 以下に比べてある程度大きいとし，相当大きい k について $g_{n-1}^k \gg g_{n-2}^k$ であるから

$d_{j.k} \fallingdotseq x_{n-1,j}\beta_{n-1}(g_{n-1}-1)g_{n-1}^k$ 　こゝで $\alpha_{n-1,j} = x_{n-1,j}\beta_{n-1}(g_{n-1}-1)$ は k には無関係であるから

$\mathbf{u}$ の収束判定条件と，k の最低見込値は

$$|d_{j.k}| = |\alpha_{n-1,j}\, g_{n-1}^k| < \varepsilon = 10^{-p} \qquad \therefore \quad k > (p + \log_{10}\alpha_{n-1,j}) / \log_{10} g_{n-1} \tag{10}$$

となる。

この考案をさらに進め $d_{j.k}$ の k による変化を考える。

$$d_{j.k} = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{ij}\, g_i^{k-1} = \alpha_{n-1,j}\, g_{n-1}^{k-1}\left\{1 + \sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_{ij}/\alpha_{n-1,j})(g_i/g_{n-1})^{k-1}\right\} \tag{11}$$

$d_{j.k}$ と $d_{j.k-1}$ の比 $r_{j.k}$ は

$$\begin{aligned} r_{j.k} &= d_{j.k}/d_{j.k-1} = \left(\alpha_{n-1,j}\, g_{n-1}^{k-1}\left\{1+\sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_{ij}/\alpha_{n-1,j})(g_i/g_{n-1})^{k-1}\right\}\right) \Big/ \left(\alpha_{n-1,j}\, g_{n-1}^{k-2}\left\{1+\sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_{ij}/\alpha_{n-1,j})(g_i/g_{n-1})^{k-2}\right\}\right) \\ &\fallingdotseq g_{n-1}\left\{1+\sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_{ij}/\alpha_{n-1,j})(g_i/g_{n-1})^{k-1}\right\}\left\{1+\sum_{i=1}^{n-2}(\alpha_{ij}/\alpha_{n-1,j})(g_i/g_{n-1})^{k-2}\right\} \fallingdotseq g_{n-1}\left(1-\left\{\sum(\alpha_{ij}/\alpha_{n-1,j})(g_i/g_{n-1})^{k-1}\right\}^2\right) \end{aligned} \tag{12}$$

{ } 内の第2項は，相当大きい k については，1に比べて相当に小さいと考えられるので，$d_{j.k}$ は，近似的に公比 $r_{jk} \fallingdotseq g_{n-1}$ をもつ等比級数であると考えてもよい。この性質を利用して，Power Method の Trial Vector $\mathbf{u}_k$ に修正を施すことにより，固有ベクトル $\mathbf{x}_n$ により高い近似をもった，ベクトル $\mathbf{u}_{k+1}$ を得ることができる。すなわち

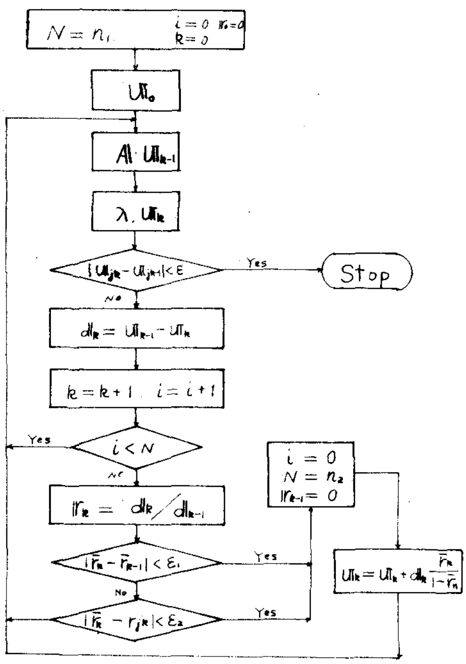
$$u_{j.k+1} = u_{j.k} + d_{jk}\cdot r_{jk}/(1-r_{jk}), \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{13}$$

(13)は，Power Method の考え方を援用したにすぎず，個々の r_{jk} を用いる理由は余りないので，ベクトル全体の平均値 $\bar{r}_k$ を用いてもよい。しかし g_{n-1} etc は未知であるため，得られたベクトルについて，d_{jk}，r_{jk} を求め，何らかの判定基準を設けて，ベクトル修正の適否を判定すべきである。

こゝでは，次の基準によって考え，そのうち，どれか一方のみが満されゝばよいとした。

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & |\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}| < \varepsilon_1 \\ (b) & |r_{jk} - \bar{r}_k| < \varepsilon_2 \end{array}\right\} \tag{14}$$

この方法の Flow chart を右に示す。



この方法によって，行なった計算（19元）では，修正を行なわない方法に比べて，とくに大きな k のとき，著るしい効果があった。数値例は当日にゆずる。

次数	1	2	3	4	5	6
通常法	13	25	65	18	300以上	計算せず
修正法	13	19	21	18	37	20
固有値	285.96	5.7893	2.8418	2.1383	6.9163	6.6971

参考文献

1 森口，高田；数値計算法 II

2 清水留三郎；行列の固有値問題，第4回電子計算機活用セミナーテキスト

3 山内，森口，一松；電子計算機のための数値計算法 I

4 Zurmühl, R. ; Matrizen und Ihre Technischen Anwendungen

5 Todd, ed ; Survey of Numerical Aualysis