

名古屋大学 正 員 足立昭平

伊藤純彦

○学生員 中川金爾

高速度計算機による開水路不定流の数値計算法はもはや目新しいものではないが、非線型微分方程式の差分近似解の収束性についてはなお問題が残されているように思われる。著者らは、貯水池の埋設過程あるいは砂防堰堤の土砂調節機能に関する基礎研究の一つとして、河道と湛水池とを結ぶ背水領域における洪水の挙動を明らかにするために、高速度計算機による数値解析を試みた。河道における流水は、そのエネルギーこう配が河床こう配に匹敵する点に特徴があり、一方湛水池では流水のエネルギーこう配はほとんど0に近い。背水領域はこのような性質を異にする二つの流れの遷移領域である。数値計算の結果はこの遷移領域において重大な誤差を捨つことを示した。その本質的な原因の究明および数値解析法の修正については、なお結論が得られていないが、高速度計算機の活用に関する問題提起としてこうした遷移領域の不定流数値解析の一例を報告するものである。

1. 開水路不定流の数値計算法

開水路水流の一次元的解析の基礎方程式は、よく知られているように次式で与えられる。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2\frac{q}{y}\frac{\partial q}{\partial x} - \left(-\frac{q^2}{y^2} - gy\right)\frac{\partial y}{\partial x} - gy(S_0 - S_f) = 0 \quad (2)$$

ここに、 x は流水の方向にとった距離、 t は時間であり、 q は単位巾当りの流量、 y は水深、 g は重力の加速度、 S_0 は河床こう配、 S_f はエネルギーこう配である。なお水路は十分に巾の広い一様断面水路であり、かつ水面巾の変化は無視できるものとする。

(1)式に $-(q/y) + \sqrt{gy}$ および $-(q/y) - \sqrt{gy}$ をかけて、(2)式との和をもとめれば、それぞれ

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a\frac{\partial q}{\partial x} - b\left(\frac{\partial y}{\partial t} + a\frac{\partial y}{\partial x}\right) - K = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + b\frac{\partial q}{\partial x} - a\left(\frac{\partial y}{\partial t} + b\frac{\partial y}{\partial x}\right) - K = 0 \quad (4)$$

が得られる。(3)および(4)式はそれぞれ正特性曲線方程式および負特性曲線方程式である。なお、

$$a = \frac{q}{y} + \sqrt{gy}, \quad b = \frac{q}{y} - \sqrt{gy}, \quad K = gy(S_0 - S_f) = gy(S_0 - n^2 g^2 y^{-3}) \quad (5)$$

である。差分近似による数値計算はかならずしも一通りではないが、(3)および(4)式がそれぞれ正および負の特性曲線方程式であることに着目すれば、 $x-t$ 平面上の固定格子点 (i, j) に関して、つぎのような差分近似が許されるであろう。

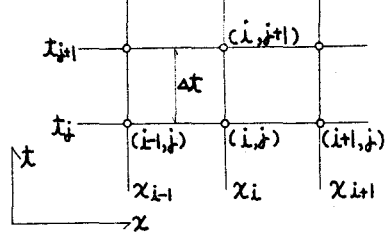
$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j}}{t_{j+1} - t_j}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{t_{j+1} - t_j}$$

(3)式においては

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}}$$

(4)式においては

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}$$



これらの差分近似を用いて(3), (4)式から点 $(i,j+1)$ 点における $g_{i,j+1}$ および $y_{i,j+1}$ を点 $(i-1,j)$, (i,j) および $(i+1,j)$ における諸量であらわせば,

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \left\{ a_{ij} b_{ij} \left(\frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \right) - (a_{ij} \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} - b_{ij} \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}) \right\} \frac{\Delta t}{a_{ij} - b_{ij}} \quad (6)$$

$$g_{i,j+1} = g_{i,j} + \left\{ a_{ij} b_{ij} \left(a_{ij} \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} - b_{ij} \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \right) - \left(a_{ij}^2 \frac{g_{i,j} - g_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} - b_{ij}^2 \frac{g_{i+1,j} - g_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \right) \right\} \frac{\Delta t}{a_{ij} - b_{ij}} - K_{ij} \Delta t \quad (7)$$

ここに $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ であり、点 $(i-1,j)$ および $(i+1,j)$ の諸量から点 $(i,j+1)$ の $g_{i,j+1}$ および $y_{i,j+1}$ を計算できることになる。 $x-t$ 平面上のすべての格子点における g および y が見出されるためには、 $t=0$ における初期条件および、 $x=x_0$ (上流端) および $x=x_d$ (堰地点) における境界条件が与えられねばならない。これらの条件はそれぞれつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{初期条件: } t=0 \text{ において, } g = g_0 \text{ (一定)} \\ \text{したがって, (2)式から, } \frac{dy}{dx} = K/a_b \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件: } x=x_0 \text{ において, } g = g_{0j}(t) \text{ (} t \text{ の既知関数)} \\ \text{(4)式を用いて, } y_{0,j+1} = y_{0j} + \frac{1}{a_{0j}} (g_{0,j+1} - g_{0j}) + \frac{b_{0j}}{a_{0j}} \frac{g_{0j} - g_{0j}}{x_i - x_0} \Delta t - b_{0j} \frac{y_{0j} - y_{0j}}{x_i - x_0} \Delta t - \frac{K_{0j}}{a_{0j}} \Delta t \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=x_d \text{ において, } g_{dj} = C (y_{dj} - H)^{3/2} \text{ (} H: \text{堰高, } C: \text{堰の流量係数)} \\ \text{(3)式を用いて, } y_{d,j+1} = y_{dj} + \frac{1}{b_{dj}} \left\{ C (y_{d,j+1} - H)^{3/2} - g_{dj} \right\} + \frac{a_{dj}}{b_{dj}} \frac{g_{dj} - g_{d-1,j}}{x_d - x_{d-1}} \Delta t - a_{dj} \frac{y_{dj} - y_{d-1,j}}{x_d - x_{d-1}} \Delta t - \frac{K_{dj}}{b_{dj}} \Delta t \end{array} \right\} \quad (10)$$

なお、(10)式における $y_{d,j+1}$ の計算は反復試行法によらねばならない。

2 数値計算の一例

演算の対象とした水路は、図-2 のようであって、堰高 $H=25\text{m}$ 、河床こう配 $S_0=1/250$ 、粗度係数 $n=0.04$ (一定) とした。上流からの流入する流量曲線 $g_{0j}(t)$ は、図-3 のような三角形とし、初期流

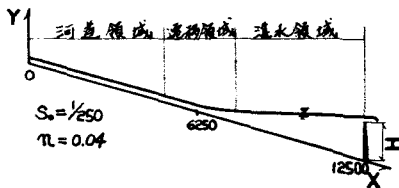


図-2 演算対象水路模型

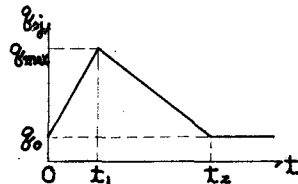


図-3 流入流量曲線

量 $q_0 = 2.35 \text{ m}^3/\text{s}$ (一定)、また、堰の流量係数 $C = 1.6$ (一定) と仮定した。堰上流 12500 m の地点を x_0 とし、差分間隔 $\Delta x = 500 \text{ m}$ を一定とし、水位上昇時間 $t_1 = 990 \text{ sec}$ 、水位下降時間 $(t_2 - t_1) = 1980 \text{ sec}$ 、最大流量 $q_{\max} = 3.076 \text{ m}^3/\text{s}$ とし、その時間差分 $\Delta t = 15 \text{ sec}$ によって計算した結果を各地点の流量曲線で示せば、図-4 のようである。図において、 $x = x_{4500}$ まで流量曲線は、除々に扁平化していきが、

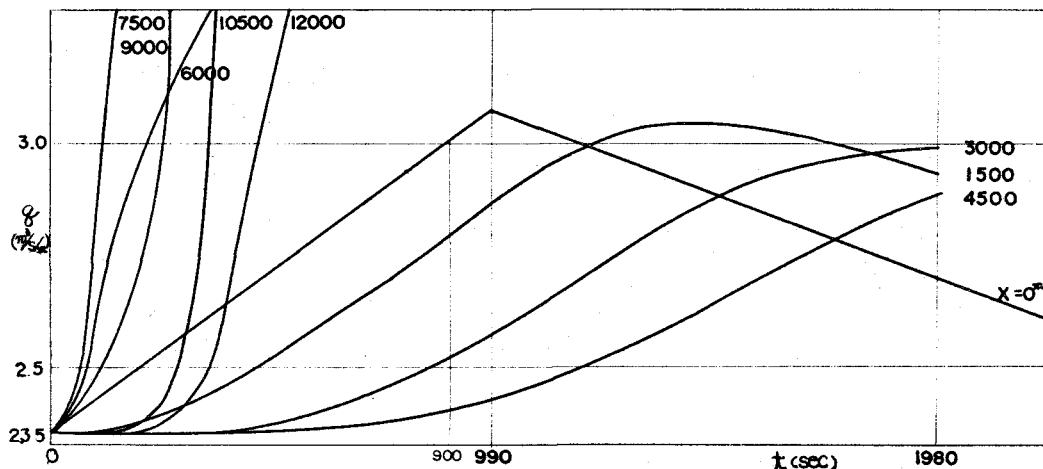


図-4 各地点の流量曲線の演算例 (その1)

$x = x_{4500}$ から異常な上昇を示している。差分間隔をさらに小さくした計算例として、距離間隔 Δx を表-1 のようにし、 $t_1 = 900 \text{ sec}$ 、 $(t_2 - t_1) = 900 \text{ sec}$ 、最大流量 $q_{\max} = 3.01 \text{ m}^3/\text{s}$ 、時間差分 $\Delta t = 10 \text{ sec}$ によって計算した結果を示したものが図-5 である。が、 $x = x_{6000}$ からの流量曲線の異常さの度合は減少するが、その傾向には変化がみられない。

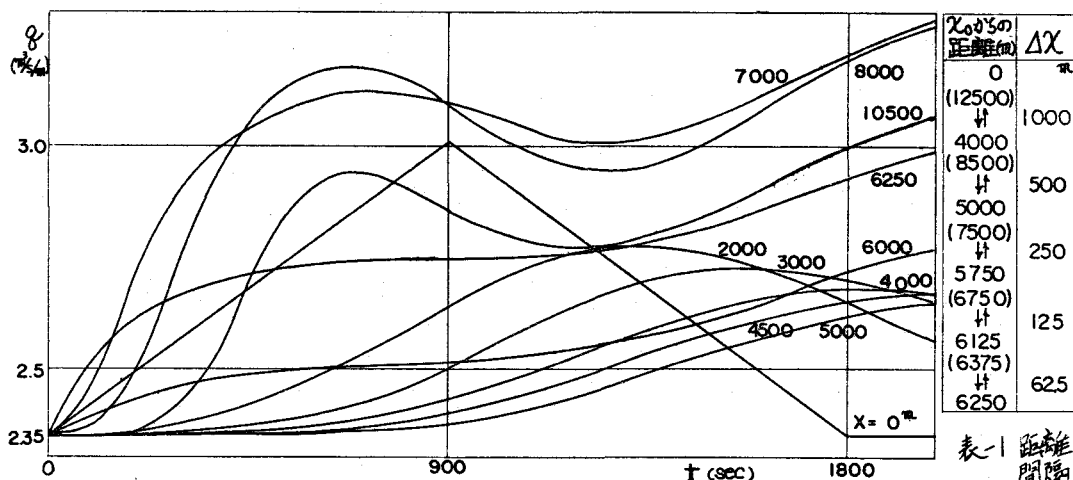


図-5 各地点の流量曲線の演算例 (その2)

図4、5 におけるこうした流量曲線の異常変化は、遷移領域における差分近似の不備によるものと考えられる。この本質的な吟味は、なお検討中であるが、この結果は高速度計算機の不定流計算への安易な適用に警告を与えるものといえることができる。