## 17 演算子法によるラーメンの振動解析

信州大学 正員 ○夏目正太郎
信州大学 正員 谷本勉之助

### 1. まえがき

構造物の振動応答は，これに作用する外力にもよるが，構造物の固有振動性状に深い関係があることは論をまたない。 実在する構造物は，それを構成する各部材は弾性体であり，その部材の振動は弾性振動である。 耐震工学では振動荷重が作用したとき，構造物がどんな動きを示し，そのときどんな応力を生ずるかを調査しなければならない。 静的荷重を作用させて部材の長さや断面が決定される。それは，たわみ量，伸縮量，軸力，モーメント等が部材の実際の性状と共に数値となって得られるし，そのまま使用しているからである。 ふりかえって，動的解析の場合を見てみると，非常に簡単な場合を除いては構造物を質点系へ等価置換と称し，弾性体であるべきものを質点系の振動で示そうとしている。 このような置換によって得られた結果は，果して実在のものを説明しているであろうか。 また，置換するのに無理があるときは，連続体としてしまうこともある。 これらの結果は，あるいは実在のものに近い値を示すかも知れないが，あくまでも近い値であり，構造物として代表さすべきものではないのではないかとの疑いも持たれる。 また振動時の変形をみるのに，たわみ振動には注目しているが，伸縮振動であるたて振動に関してはほとんどその挙動に注意が払われていない。 たしかに変形量としては，たわみ振動が目立つであろう。 しかし，最近，超高層建築や長大橋が建設されるようになってくると，各部材の伸縮運動も累加されて大きくなると思われる。 その動きのために生ずる軸力，モーメント等も当然見捨てられないものであろう。 もっとも大変形するような構造物については，微少変形理論をこえて，大変形理論の領域で論ぜられなければならない。 我々は，弾性体の振動を等価質点系振動に置換するといった技巧に疑問をもち，それを排除すべく，構造物は弾性体と弾性体の結合であり，結合点では図形量，力学量共にあますところなくすべて満足するように式を書き並べたわけである。 これによれば，長さをもったものでも単なる一質点と考えることも不用になり，実在のままの寸法をとり入れられ，変形量，力学量をも明らかに見ることができるのである。 従って耐震工学の見地からすれば，そこに見られる数値が構造物各部の種々の性質を示していることになるので，何の懸念もなく検討できるわけである。

### 2. 弾性棒の振動

断面積 A である一様な真直な棒の弾性係数E，せん断弾性係数G，断面二次モーメントI，長さ $l$，質量 $\gamma$とすれば，たわみ振動，たて振動，ねじれ振動の一般解は時間の項を略して

(a) たわみ振動

$$w(\rho) = C_1\cdot\cos\lambda l\rho + C_2\cdot\sin\lambda l\rho + C_3\cdot\cosh\lambda l\rho + C_4\cdot\sinh\lambda l\rho, \qquad (1)$$

$$\lambda^4 = \frac{\gamma\cdot A\cdot\omega^2}{E\cdot I\cdot g}, \qquad (2)$$

(b) たて振動

$$u(\rho) = C_5 \cdot \cos\mu l\rho + C_6 \cdot \sin\mu l\rho, \qquad (3)$$

$$\mu^2 = \frac{r \cdot \omega^2}{E \cdot g}, \qquad (4)$$

(c) ねじれ振動

$$\phi(\rho) = C_7 \cdot \cos\nu l\rho + C_8 \cdot \sin\nu l\rho, \qquad (5)$$

$$\nu^2 = \frac{r \cdot \omega^2}{G \cdot g}, \qquad (6)$$

であらわされる。 ここで $\rho = \frac{x}{l}$， $\omega$＝ 円振動数，$g$＝重力の加速度である。

骨組構造物については，これら真直な棒の振動を組み合わせて構造物全体の振動性状を知ることができる。 さらに耐震壁とか，床板の振動性状を論ずるには，これに板の振動の一般解を加える必要がある。

## 3. 門型ラーメンの面内自由振動

簡単な構造物として 図－1 の系で考えれば，境界条件や節点における連続性は図に示すようになる。この中ではたわみと伸縮とよりなる「6 次曲げ」を考え，従って式に含まれる積分常数群は

$$\mathbb{N}_i = \{ C_1\ C_2\ C_3\ C_4,\ C_5\ C_6 \} \qquad (7)$$

となる。 図－1に示される境界条件を入れると でも でもそれぞれ3 箇の積分常数を除くことができ，両方合わせて6 箇となり

$$\Omega = \{ \mathbb{N}_1',\ \mathbb{N}_3' \}, \qquad (8)$$

で示される。 左の節点では

$$\mathbb{L}_2 \cdot \mathbb{N}_2 = \mathbb{V}_{L1} \cdot \mathbb{N}_1' = [\mathbb{V}_{L1},\ 0_{6\times3}]\Omega, \qquad (9)$$

の条件ができ，右の節点では

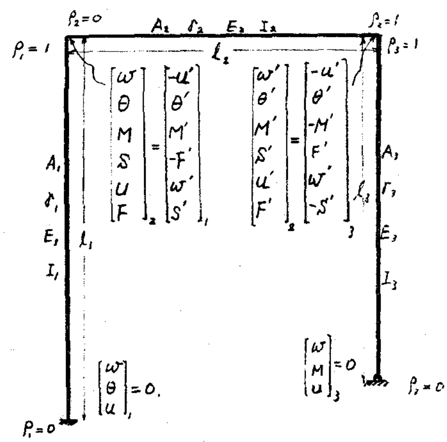
$$\mathbb{R}_2 \cdot \mathbb{N}_2 = \mathbb{V}_{R,3} \cdot \mathbb{N}_3' = [0_{6\times3},\ \mathbb{V}_{R3}]\Omega, \qquad (10)$$

の条件が成立する。 (9)，(10) より

$$[\mathbb{L}_2^{-1} \cdot \mathbb{V}_{L1},\ -\mathbb{R}_2^{-1} \cdot \mathbb{V}_{R3}]\Omega = 0, \qquad (11)$$

となり，次の方程式を得る：

$$F(\omega) = \left| \mathbb{L}_2^{-1} \cdot \mathbb{V}_{L1},\ -\mathbb{R}_2^{-1} \cdot \mathbb{V}_{R3} \right| = 0. \qquad (12)$$




図－1 門型ラーメン

## 4. 多層階門型ラーメンの面内振動

多層の場合は，境界条件と最上階の節点のつなぎは，上記と同じであるが，中間の節点において移行演算が加わる。 中間の節点には部材が3 本集ってくるので，それぞれの節点で図形量のつなぎが3 本式となって余分にでてくる。 従ってこれらを水平部材の $\mathbb{N}_{r2}$ を鉛直部材の $\mathbb{N}_{r1}$ と $\mathbb{N}_{r3}$ とによって表わされるように工夫し，結局，$\Omega$ 量にて表現せしめれば，各部材の $\mathbb{N}$ 量が $\Omega$ 量のみに依存することになる。 水平部材と鉛直部材との間で図形量を等しくとれば

$$\mathbb{H}_{r2} \cdot \mathbb{N}_{r2} = \mathbb{A}_{r1} \cdot \mathbb{N}_{r1} + \mathbb{B}_{r3} \cdot \mathbb{N}_{r3} = \mathbb{P}_{r1}\Omega + \mathbb{Q}_{r3}\Omega$$

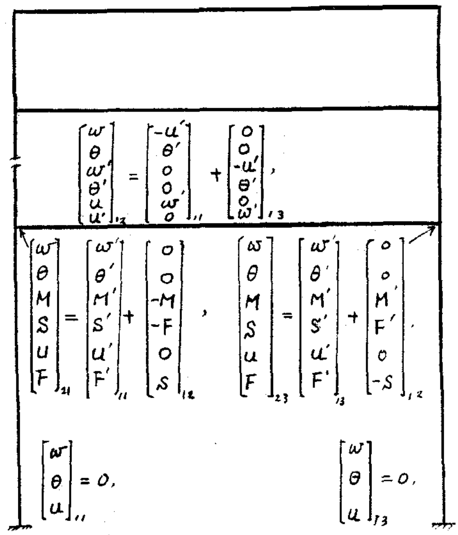
$$\mathbb{N}_{r,2} = \mathbb{S}_{r,2}\,\Omega \qquad (13)$$

一方鉛直部材の図形量のつながりと節点での力学量のつり合い条件として

$$\mathbb{L}_{r+1,1}\cdot\mathbb{N}_{r+1,1} = \mathbb{J}_{r,1}\cdot\mathbb{N}_{r,1} + \mathbb{K}_{r,2}\cdot\mathbb{N}_{r,2} \qquad (14)$$

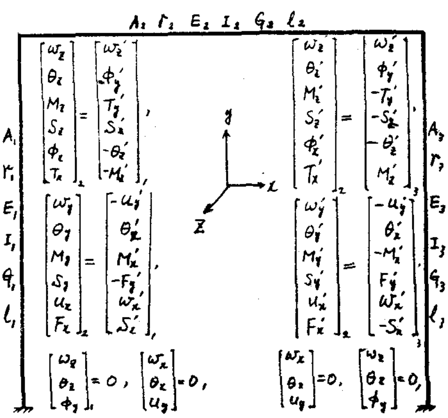
$$\mathbb{R}_{r+1,3}\cdot\mathbb{N}_{r+1,3} = \mathbb{Q}_{r,3}\cdot\mathbb{N}_{r,3} + \mathbb{T}_{r,2}\cdot\mathbb{N}_{r,2} \qquad (15)$$

が得られる。 これら (14)，(15) 式へ (13) 式を入れれば，$\mathbb{N}_{r+1,1}$，$\mathbb{N}_{r+1,3}$ が $\Omega$ 量だけで表現される。 もちろん $\mathbb{N}_{r,1}$，$\mathbb{N}_{r,3}$ は $\Omega$ で表わされているものである。 かくして4におけると同様に，振動数方程式を得る。 これからわかるように，多層多径間になると手続きは複雑になるが，同じ繰り返し演算で振動数を求めることができる。



図－2　多層階ラーメン

## 5. 門型ラーメンの面外自由振動



図－3　門型ラーメンの面外自由振動

面外振動では3次元的挙動となり，図－3に示すような条件式が列挙される。 これにはねじれ運動が加わるので，今までのようなたわみと伸縮の組合せのほかに，たわみとねじれの組合せを考慮しなければならない。 これらを分類してマトリクス型式に表現すれば，その次数は高くなるが，要素の混りこみがなく，計算手順を明確にすることができる。

## 6. むすび

たわみに対し伸縮の量は微少なるがゆえに省略すれば，このような条件式を書きならべることができないが，微少であっても値をもっていることを取りあげて，式へ入れることにより，構造物の実体の姿で計算することになり，マトリクス計算も容易になり，解析方法として優れていると確信するものである。