

8 軸方向荷重をうける塔柱の横振動について

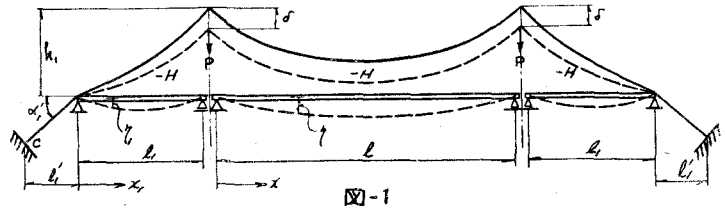
名古屋工業大学 正員 荒井利一郎
岐阜高専 正員 鎌田 相互

1. まえおき

吊橋塔柱は、主として圧縮部材ではあるけれども、長径間吊橋においてはその細長比は大きくなりフレキシブルな構造物になる。このような塔柱が横振動する場合にはかなり大きな変形が生じると考えられる。これらの横振動を考える場合、塔柱にはケーブルの緊張と弛緩の影響があり、これらの力は塔柱軸に直角な方向に作用するとともに、変形が大きくなり塔頂の沈下を考えるとすれば塔柱の軸方向にもまた作用すると考えられる。ここではそのような軸方向に作用する力をバネを介した強制力とみなしバネ定数を設定した場合の塔柱の横振動について一つの考察を試みた。

2. ケーブルをとめてうける塔柱軸方向の力

塔頂においてケーブルに図-1のような鉛直力 P を作用させるときの鉛直変位 δ を計算する。記号は図-1に示すものの他は慣用のものを用い、ケーブルの水平力を $H = \alpha P$ と表わすと δ は



$$\delta = \frac{H L_c}{E_c A_c} - \frac{\partial f \alpha}{l^2} \int_0^l x dx - \frac{4 f \alpha}{l^2} \int_0^l x dx \quad (1)$$

で表わされる。ここにケーブル各点の傾斜角を γ , γ_1 として $L_c = \int_0^l \frac{dx}{\cos^2 \gamma} + \int_0^l \frac{dx}{\cos^2 \gamma_1}$ である。補剛桁の変形を $\hat{y} = a \sin(\pi x / l)$, $\hat{y}_1 = a_1 \sin(\pi x_1 / l_1)$ と仮定して (1) を計算し P と δ と割れば

$$k_0 = \frac{P}{\delta} = P / \left[\frac{H}{E_c A_c} \left\{ \frac{l_1'}{\cos^2 \alpha_1} + l_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{f_1^2}{l_1^2} \right) + \frac{l}{2} \left(1 + \frac{\partial f^2}{l^2} \right) \right\} - \frac{\partial f_1 a_1}{l_1 \pi} - \frac{4 f a}{l \pi} \right] \quad (2)$$

がえられる。これを塔柱軸方向に作用するバネ定数として用いる。ここでは塔頂の軸方向の変位の影響を考えるので、水平変位は拘束されているものと仮定する。

3. 一端がバネで拘束されたはりの横振動

一端がその軸方向に対してバネ定数 k_0 なるバネで拘束された、軸荷重 P をうけるはりの横振動を表わす方程式は、はりを n 個の質点系として考えるときその自由振動に対して

$$M \ddot{y} + c \dot{y} + (K - P A) y + \left\{ \frac{k_0}{2} \sum_j \frac{1}{l_j} (y_j - y_{j-1})^2 \right\} A y = 0 \quad (3)$$

で表わされる。ここに M は各質点の質量対角行列, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ は各質点の変位, 速度, 加速度のベクトル, c は粘性減衰係数, K は剛度行列, A は質点間隔からなる矩形行列, y_j は y の要素である。ここで解 y を変位モードベクトル (基準座標) $\mathcal{Y}$ と時間関数 (基準関数) $\gamma^{(i)}$ とおいて $y = \mathcal{Y} \gamma^{(i)}$ と表わし, $\mathcal{Y}$ が正規化されているものとすれば, (3) を変形して $\gamma^{(i)}$ の常微分方程式

$$m \ddot{\gamma}(t) + c \dot{\gamma}(t) + k(1 - \alpha_p) \gamma(t) + \beta \dot{\gamma}^3(t) = 0 \quad (4)$$

与えられる。ここに $m = \mathcal{M}/M$, $c = c_0/\mathcal{M}$, $k = k_0/\mathcal{M}$, $\beta = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{2} (\gamma_0 - \gamma_0)^2 / \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ の質量ベクトルである。また α_p はオイラーの座屈荷重に対する軸荷重 P_0 の比である。

(4) は $\gamma(t)$ の 3 次項を含む非線形微分方程式であって、解は $c=0$ のとき楕円関数でえられるが、普通には一般解をうることが出来ない。しかし c , β が m , k に比して微小とみなすことのできる場合（すなわち $|\mathcal{M} \dot{\gamma}(t)/\gamma(t)| \ll 1$, $2\mathcal{M}/\omega_0 \ll 1$ ）には、その近似解が

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{-\gamma t} \cos\{\omega_0 t + \frac{3\mathcal{M}\gamma_0^2}{16m\omega_0^2} (1 - e^{-2\gamma t}) + \phi_0\} \quad (5)$$

で与えられる。ここに $\omega_0^2 = k(1 - \alpha_p)/m$, $\gamma = c/2m$, $\mu = \beta/m$ であり、 γ_0 と ϕ_0 は振幅（変位）と位相角の初期値である。また減衰を無視する場合には

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cos \omega t \quad (6)$$

与えられる。ここに $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{2}\mu\gamma_0^2$ である。この場合周期は $T = 2\pi/\omega$ と考えられる。

次に系に一様な外力 $Q_0 \zeta(t)$ が作用する場合には (4) を求めたと同じようにして

$$m \ddot{\gamma}(t) + c \dot{\gamma}(t) + k(1 - \alpha_p) \gamma(t) + \beta \dot{\gamma}^3(t) = g_0 \zeta(t) \quad (7)$$

与えられる。ここに $g_0 = \mathcal{M} Q_0$ である。 $\zeta(t)$ が調和関数例えば $\zeta(t) = \cos pt$ である場合には、その定常周期振動に対しては解を

$$\gamma(t) = \sum_{n=1,3,\dots} X_n \cos n(pt - \varphi) \quad (8)$$

と仮定して X_n と φ を決定する。第 1 近似解（実際上はこれと充分である）については

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2(1 - \nu^2)X + \frac{3}{2}\mu X^3 &= \pm \sqrt{p^2 - 4\gamma^2\nu^2\omega_0^2 X^2} \\ \varphi &= \sin^{-1}\left(\frac{2\gamma\nu\omega_0 X}{p}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

から決定することになる。ここに $\nu = p/\omega_0$, $p = \mathcal{M}/m$ である。これから外力の振動数 p と系の線形自由振動数 ω_0 との比 ν に対する振幅 X の共振曲線をうる事が出来る。

4. 計算例及びその考察

計算例としては中央径間 $l = 780^m$, 側径間 $l_s = 320^m$ の吊橋（大鳴門吊橋板）の主塔（塔高 $h = 121^m$ …橋台を含む）について行なった。質点系は図-2 のようであり、塔頂の水平変位は拘束されているものと仮定したのでその振動モードは図-3 のようである。この塔柱においてバネ定数 k_0 を求めるにあたり $P = P_0/4$ とし、補剛桁のためみはこのときスパン中央でスパンの $1/500$ のたわみが生じているものとして計算し、 P_0 は最低次の振動モードに対応するものを用いた。これから k_0 を求めると $k_0 = 6472^{\frac{kg}{m}}$ であった。また (4), (7) 式に用いられている諸量は表-1 に示すようである。以上から次のようなことが考察される。

表-1

	1次	2次	3次
$P_0(t)$	78594	219250	515490
$m(\frac{t}{sec^2})$	87.8	84.4	88.3
$k_0(\frac{kg}{m})$	3468	31698	164070
$\beta(\frac{kg}{m})$	6.04	6.41	31.83
$\mu(\frac{1}{sec^2})$	0.071	0.759	3.607

i). 自由振動周期について：減衰を考えない場合には、振動周期は初期変位 δ_0 が大になると短くなり、 δ_0 は軸荷重が大になれば小となるので周期は長くなる。それ故軸荷重が大なる程非線形項の影響が大きく、理論上は軸荷重がオイラーの座屈荷重に近づいてもある周期で振動する。図-4は δ_0 と軸荷重が増すにつれ非線形項の影響が大きくなることを示すものである。この傾向は高次の振動モードに対するもの程大きい。減衰を考えると周期は初期変位に関係することはもちろんであるが、時間と共に変化して $t=0$ では $\gamma=0$ の場合に等しく $t=\infty$ では線形振動の周期に近づく。また振幅は小さくわずがづつ減衰してゆく。図-5に $\gamma=0.025$ の場合の第1周期の振幅を示す。

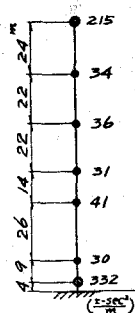


図-2 質量分布

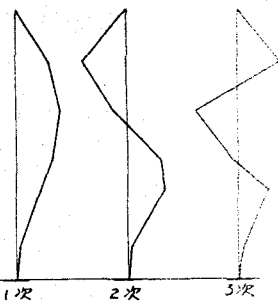


図-3 正規化した振動モード

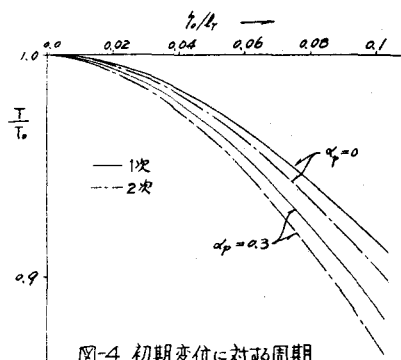


図-4 初期変位に対する周期

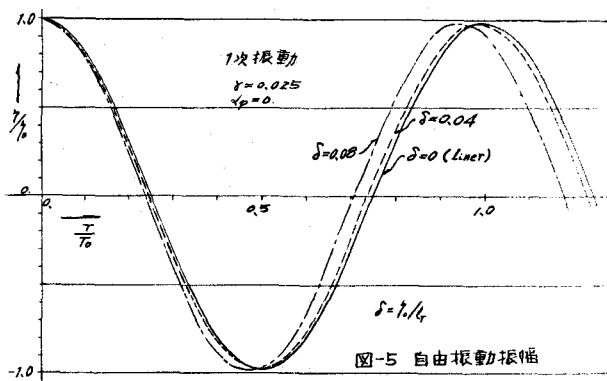


図-5 自由振動振幅

ii). 強制振動の共振応答について

第1近似に対する共振応答曲線を求めると図-6のようになる。これは線形の場合の共振曲線を漸近線 $X = \sqrt{4\omega_0^2(\nu^2-1)/3\gamma} \dots (\nu \gg 1)$ なる曲線によって傾けた形をしており、この傾きは軸荷重が大きい程著しい。 ν を大にすると3個の共振振幅がえられる領域があり、この領域では小さな振幅へ飛ぶことが考えられ、逆に大なる方から ν を小さくすれば急に大振幅の振動に移ることが考えられる。

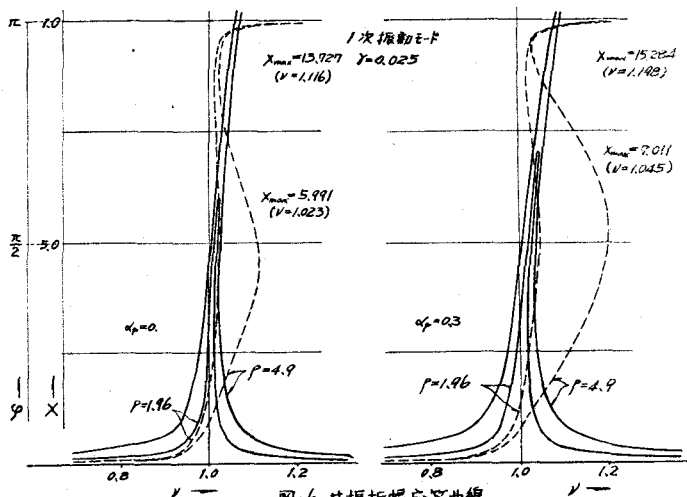


図-6 共振振幅応答曲線

参考文献：1). V. V. Bolotin "The Dynamic Stability of Elastic Systems". 2). Journal of Applied Mechanics, Brief Note 3-1964 (P.139-140). 3). J. W. Gillespie & Boen-Dur Liaw "Frequency Analysis of Beams by Flexibility Method" 1-1964 E.M.D. ASCE. 4). 平井, 伊藤 "吊橋主塔の動的弾性変位" 第20回年次講演会講演概要。