

2 テーパーのついたアーチの振動解析

名古屋工業大学 正員 松浦 聖
名工大大学院 O 榎井孝昌

(I), まえがき アーチの振動に関する研究は、

既に以前より多くの研究成果が発表されており、なお近くは第22回土木学会年次学術講演会においても数篇の発表がなされている。さてここでは第22回土木学会の講演会で、弾性座屈と対応させて発表した振動の解析法⁽¹⁾をも考察の便宜から少し触れ、さらにそれに基づいて行った若干の数値計算の結果と、模型実験の結果とを主として述べることにする。

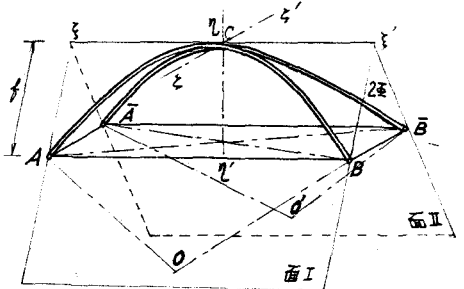


図-1 アーチ見取図

解析の対象としたテーパのついたアーチは、図-1

に示すように、いわゆるバスケットハンドル形式のアーチである。1本のアーチの振動では、従来、面内振動および面外振動が個々に取扱われて、各種論議されて来たが、ここで問題とするテーパのついたアーチでは、面内および面外振動が1つの振動形において、同時にひきおこされ、したがってテーパ率が振動数に対して影響を与える1つの係数として取り挙げられねばならなくなる。そこでその互の変化に特に着目して、振動性状を考察してみることにする。なおアーチは円弧で、解析には曲げねじりの影響は考慮しておらない。

(II), 振動解析 解析には面内振動を論じた F.W. Waltham⁽²⁾ の研究を参考としている。考察の順序として簡単に振動の解析手順を述べれば次のとおりである。

いまアーチの座標系、断面力および変位を図-2、図-3のようにとり、アーチの微小要素に対するツライを考えると、次ぎの式(1)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{ds} - S_y + XR &= 0, \quad \frac{dS_x}{ds} + N + YR = 0, \quad \frac{dS_z}{ds} + ZR = 0 \\ \frac{dM_x}{ds} - M_y + M_p R &= 0, \quad \frac{1}{R} \frac{dM_y}{ds} + \frac{M_x}{R} - S_z = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{dM_z}{ds} - S_y = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

ただし、 X, Y, Z, M_p は、微小アーチ部材要素に働く慣性力である。さてここで、断面力および慣性力の変位、 $u(\theta, t), v(\theta, t), w(\theta, t), \varphi(\theta, t)$ による表示式(2)を、考慮し、さらに式(1)のような置き換えを試みれば、結局(4)式のような運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{EI_x}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \quad M_y = -\frac{EI_y}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \varphi \right) \\ M_z &= -\frac{EI_z}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right), \quad N = \frac{EA}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \end{aligned} \right\}$$

$$X = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad M_p = -\frac{\mu I_p}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \dots (2)$$

ただし、 EI_x はアーチの x 軸まわりのネジリ剛性、 EI_y, EI_z および A はアーチの y 軸、 z 軸まわりの曲げ剛性と横断面積であり、 μ および I_p は部材の材軸に沿った単位長さ当りの質量およびセンド中心に関する断面2次極モーメントである。

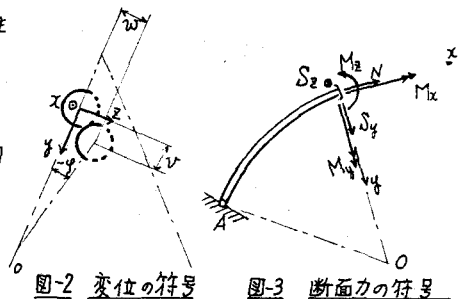


図-2 変位の符号

図-3 断面力の符号

また(3)式は次ぎのようである。

$$u = \bar{u} \cos \omega t, \quad v = \bar{v} \cos \omega t, \quad w = \bar{w} \cos \omega t, \quad \varphi = \bar{\varphi} \cos \omega t \quad \dots\dots (3)$$

ここで ω は円振動数であり、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\varphi}$ は θ のみの関数である。さいごに求めた運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + (2 + r \cdot l_e) \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + (1 - l_e - r \cdot l_e) \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} + (l_e - r \cdot l_e^2) \bar{u} &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + [2 + \frac{l_e \cdot g}{h} \cdot r(1 + \frac{1}{g})] \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} + [1 - l_e \cdot g - l_e \cdot g \cdot r(1 + \frac{1}{g})] \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + [\frac{l_e \cdot g}{h} - \frac{l_e \cdot g^2}{h} \cdot r(1 + \frac{1}{g})] \bar{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

ここで $\bar{u}, \bar{v}, l_e, r, h, g$ は無次元パラメーターで、次の(5)式で表わされる。

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{R}, \quad \bar{v} \equiv \frac{v}{R}, \quad l_e \equiv \frac{KR^4}{EI_2} \omega^2, \quad r \equiv \frac{I_2}{AR^2}, \quad h \equiv \frac{GJ}{EI_2}, \quad g \equiv \frac{I_2}{I_1} \quad \dots\dots (5)$$

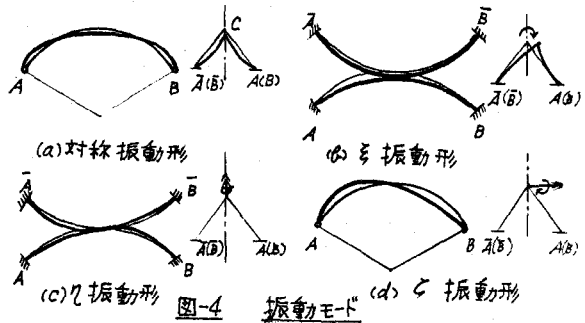
さて、式(4)の解としては、たとえば式(6)が考えられる。

$$\bar{u} = \sum_{x=1}^3 (H_x \cos r_x \theta + I_x \sin r_x \theta), \quad \bar{v} = \sum_{x=1}^3 (J_x \cos \pi_x \theta + K_x \sin \pi_x \theta) \quad \dots\dots (6)$$

ここで r_x, π_x は特性方程式の解であり、 H_x, I_x, J_x, K_x は積分定数である。

さて振動数方程式の決定には、積分定数を決定しなければならない。ここで振動形の、通常起り易いモードとして、図-4に示す変形状態が考えられる。そこでこの4種類の振動形について解析してみることにする。

いま1例として、対称振動の場合の境界条件を述べると次ぎのようになる。



交点で: $\bar{v} = 0, \frac{d\bar{v}}{d\theta} = 0, \bar{\varphi} = 0, \bar{\xi} = 0, \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\theta^2} = 0, \bar{u} = 0$

スパン中央で: $\frac{d\bar{v}}{d\theta} = 0, \bar{\varphi} = 0, \bar{v} - \tan \bar{\xi} \cdot \bar{\xi} = 0, \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\theta^2} = 0, \bar{u} = 0, -g \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + \tan \bar{\xi} \cdot h \frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} + \tan \bar{\xi} \cdot \frac{d\bar{v}}{d\theta} - \tan \bar{\xi} \cdot \frac{d^2 \bar{\xi}}{d\theta^2} = 0$ (7)

ここで $\bar{\xi} \equiv \frac{\varphi}{R}$ である。

さて以上式(7)のような境界条件を式(6)などに代入すれば、 r, π, ξ 振動の場合には24元連立1次の同次方程式が、対称振動の場合は、12元連立1次の同次方程式が得られるので、結局各積分定数の係数行列式がゼロでなければならないという条件より、振動判別式が求められる。それより固有値、 $l_e \equiv \frac{KR^4}{EI_2} \omega^2$ が決定されることとなる。

(Ⅳ). 数値計算による固有振動数に関する若干の検討

振動数を表わすこととなる無次元化した固有値 $l_e \equiv \frac{KR^4}{EI_2} \omega^2$ は同じく無次元化されたパラメーター g, r, h およびテーパ率と h/l の5つに関連してくる。

ここではとくに至に注目し、パイプ構造物のアーチを主体にして、両端ヒンジ構造を考慮してみることとする。すなわち図-5は $g=1, h=2/2.6$ 、 r も一定 ($r=1/4 \times 10^{-6}$) とし、 h/l 、 $\bar{\xi}$ と

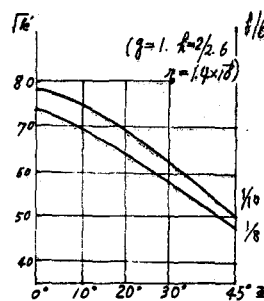


図-5 対称振動

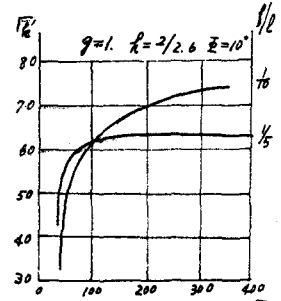


図-6 対称振動

変化させてを求めた図である。図-6は特に ν の変化と f の関連において、 ν の値の変化を見いだすための図で、ほとんどの場合は図-6に示すように、 $f:1/5 \rightarrow 1/10$ になるにしたがって ν の値は大きくなるが、断面の形状寸法によってはこれと逆の結果になることがあり得ることもわかる。ただし図-5および図-6における ν 、 ν は式(9)の ν 、 ν をそれぞれ $\nu = \frac{H}{E I_s} \omega^2$ 、 $\nu = \frac{I_s}{A E}$ とおきなおしたものである。

(IV) 固有振動の実験、解析して得られる値と実験値とを比較考察するために以下に述べるような振動実験を試みた。まず試験体模型の製作として、実験した6本のアーチの寸法は表-1に示している。断面は矩形で両端は固定支持とした。

供試体	長さ l	矢高 f	断面寸法 厚み t 高さ h	至	R	支点間隔	2α
1			0.9	30°	325	375	
2				45°	265	53.0	
3	300	375	1/8	15°	362	194	56°10
4			1.2	30°	325	375	
5				45°	265	53.0	
6	30	1/10		30°	26.0	30.0	57°30

表-1 模型アーチの諸元

測定方法の順序としては、図-7に表わす1, 2, ... 6の各断面外側の下辺に電気抵抗線ヒズミ計のゲージを接着し、図-7に示すa, b, c, およびd方向に錘りをつるして載荷し、その負荷を一挙に除いたことにより発生する動歪の変化をオシログラフに記録し、アーチの振動性状を把握した。

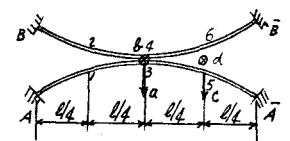


図-7 起振点および測定点

発生する振動形は設定した測定点の動歪の符号より判定した。

測定回数は載荷方法a, b, c およびdに対して各2回、計8回を1本のアーチに対して原則的に実施した。その結果の1例は表-2に示したとおりである。表より同じ載荷方法に対する2回の結果および1つの載荷測定に対する6つの示す値は、割合一致していることがわかる。

供試体	起振方法	測定点						振動形
		1	2	3	4	5	6	
6	a	(1) 25.7				25.5	25.7	ξ
		(2) 25.7				25.7	25.7	
	b	(1) 29.0	29.0	29.0		29.0	29.5	対称
		(2) 29.0	29.5	29.5		29.0	29.0	
	c	(1) 27.7	27.7	27.7	27.7	27.8	27.8	η
		(2) 27.6	27.6	27.6	27.7	27.5	27.6	
d	(1)	28.0	28.0	28.0		28.0	28.0	ξ
	(2)	27.8	27.8	27.5		27.8	27.9	

表-2 測定点の振動数 ν_{abc} および振動形

判定結果および計算結果を表-3に纏めて示してある。実験の結果からみて、振動形としては特に起振方法との関連はみられないがこの実験では、全体としてη振動形の発生が多くみられた。また表-3における実験と計算値との比較では、特にη振動の誤差が大きい。これらの誤差は実験において模型の製作上避けられない誤差、たとえば模型のスパン中央点での剛結の状態と解析条件との若干の差異とか、あるいはまた支承における固定度のぐくわずかの不備などが影響しているものと思われる。

供試体	実験値		計算値(%)		
	固有値 ν	振動数 ν	振動形	対称値	非対称値
1	75.0	21.0	ξ	68.4	98.5
2	87.1	22.7	η	68.5	96.4
3	99.2	24.1	η	110.	151.
4	112.	25.5	η	119.	158.
5	114.	26.0	η	122.	174.
6	254.	25.7	ξ	258.	260.
	295.	27.7	η		

表-3 実験固有値と計算値

(V) あとがき、なお引き続き各種振動形についての検討を進めているが、以上特に至の変化に着目して解析考察を試みた結果、かかるアーチの第1次固有振動を調べるには一般にηおよび対称振動を考察すれば、問題となる最低の振動数は見いだされるものと考えられる。また至の影響が振動性状におよぼす状態がほぼ掌握できたと思われる。さいごにこの研究に対して東大奥村教授ならびに名工大荒井、岡林教授に御指導、御助言をいただいた。ここに記して感謝の意を表します。

①奥村 起浦：第22回年次学術講演会(上)2) F.W. Wallberg: Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, 1934 Ingenieur-Archiv