I 演算子法による変形法の考察

信州大学　正員　○吉沢　孝和
信州大学　正員　　谷本勉之助

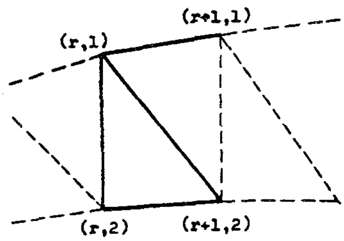
I. 演算子法について

演算子法（operational method）は、筆者の1人（谷本）がASCE誌上で発表した論文[1)2)]において示した構造解析法に対する用語であり、その概要については41年度の中部支部会で報告している。[3)] この解析法は、次のような思想のもとに組み立てられている：

1. 構造物の各構成部材について、その力学的挙動を表わす基礎微分方程式の一般解に注目し、その積分常数群を列ベクトルで表示し、これを固有マトリクス（eigenmatrix）と名付ける。

2. 構造物の骨組は、一定の幾何図形を要素とする1つの集合体とみなすことができる。要素となる1つの骨組をその構造物の単位構と呼ぶことにする。

3. 1つの単位構をとりだし、その中に含まれる節点での結合条件を処理することにより、固有マトリクスの次数を低減させることができる。たとえば、図－1の実線部分は4本の部材からなる単位構を示す。各部材力は外力を受けて、曲げと軸方向の伸びを生ずるものと考えると、1つの部材の未知量は6個となり、全体で24個の未知量を有するが、これらの部材が節点 r1, r2で剛結されているとして部材端の変位の適合条件を処理すると、未知量は12個に低減する。これを列ベクトルで表示し、単位構の固有マトリクスと呼ぶ。



図－1 単位構

4. 隣接する2つの単位構同志の結合条件はマトリクス形式で処理される。その結果、一方の固有マトリクスと荷重項を他方の固有マトリクスに移行させることができる。すなわち、2つの単位構の間の移行公式が得られる。これは単に、マトリクス形式にまとめられた移行演算子（shift operator）を該当する固有マトリクスおよび荷重項に前掛けするだけの操作である。

5. 移行公式により、基準となる単位構の固有マトリクスを構造物全体に流通させることができる。よってこれを流通マトリクス（current- matrix）とも呼ぶ。代数学的にみるならば、この操作は、各単位構の移行演算子の連続的な内積を行なうだけのことなのである。このような観点から、演算子法なる用語が生まれた。

6. 流通マトリクスの値は、移行の最終段階の境界条件または結合条件によって決定される。これにより、構造全体の解が得られる。

7． 剛節構造物の固有マトリクスは、上に述べたような積分常数群を未知量とした形をとる。この場合には2つの単位構の間で完全な移行が行なわれる。 滑節構造物については、経験上1つの 単位構の部材力と節点変位とを総括して固有マトリクスとして扱うのが簡単であると考えている。 このような時には移行演算の際に、3つの単位構が関連してくるので、tri—diagonal matrix としての処理方法がとられることになる。[4)5)]

8． ここで本法とReduction法との相違点を述べておきたい。 微分方程式の一般解に基礎をおくという点と未知量の移行という点では思想上の共通点がみられるが、 Reduction 法では部材端におけるstate—vectr に注目しているのに対し、本法ではそれ以前の積分常数群に注目しているところに根本的な差異がある。 そのために、本法では荷重の影響は荷重マトリクスとして独立させて扱っており、1つの部材についての演算マトリクスの次数は、Reduction 法のそれよりも1 次低減された姿となる。このことは、ラーメン，格子等の解析の際に重要な意味をもつ。

9． 実算上の問題として、移行演算子の連続的な内積によって数値の round—off error がどの程度に表われるかという点に注意が払われるべきである。 この点については higher precision 演算の採用によって解決できることを確認している。

10． 演算子法の詳細については紙面の関係上割愛いたします。（本法についての別刷パンフレットをご希望の方は、下記へご連絡下さい）※

II. 変形法について

A. 考 察

1． 変形法は周知のように、その基本式において材端力が材端変位の関数としてあらわされているために、骨組構造の解析が系統的に進められ、未知量は節点変位のみに限定されるという特長をもっている。 基本式のこのような組み立ては、単に固有マトリクスを材端変位に置きかえることにほかならない。 図－2 のような部材AB についてこの処置をして部材力を書き出すと次のようになる：

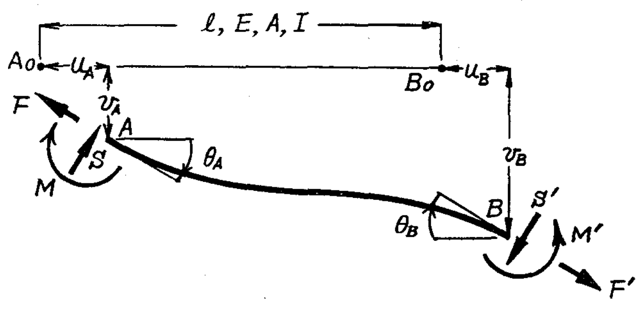
$$\begin{bmatrix} F \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l}j & j \\ 0 & -j & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{l}j & j \\ 0 & j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l & \frac{2}{3}l & \frac{1}{3}l & 0 \end{bmatrix} K, \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} F \\ S \\ M \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l}j & j \\ 0 & j & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{l}j & j \\ 0 & -j & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & -\frac{1}{3}l & 0 & 0 \end{bmatrix} K, \qquad (2)$$

※ 長野市 若里 500 信州大学工学部 土木工学科 谷本勉之助，吉沢孝和

$$\begin{bmatrix} f \\ j \\ k \end{bmatrix} = \frac{E}{\ell} \begin{bmatrix} A \\ -\frac{6}{\ell} I \\ 2I \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$\begin{cases} \ell = \text{部材の長さ} \\ E = \text{弾性係数} \\ A = \text{部材断面積} \\ I = \text{断面二次モーメント} \end{cases}$



図－2　曲けと伸びを生ずる構成部材

K はこの部材の荷重マトリクスである．　上式で $u=F=0$ と置けば、たわみ角式になる．

2．　変形法で実算上問題となるのは、荷重項の取り扱いではなかろうか．荷重の作用している部材の材端力には両端共に荷重項があらわれる．　これは基本式組立の思想からみて、止むを得ないことではあるが、そのために荷重の影響の演算にむだな労力が費されている点は見逃せない事実である．詳しくは文献 6) 7) を参照されたい．

3．　単位荷重を作用させて影響線を求めるという在来の手順は、電算の利用される現在、いささかまわりくどいように思われる．設計上必要となるものは数値である．任意の荷重状態の影響を直ちに数値として与えうるような構造物の特性をあらわすマトリクスを求めるという方向に解析を進めていく、といった考え方が望ましい思想ではないだろうか．このような特性をもったマトリクスを筆者等は一応、geometry—matrix という用語で定義している．6) 7)　これを用いて在来の stiffness matrix や flexibility matrix の考察ができる．

4．　対称性を利用して未知量を減らしたり、対称変形を観察して解析結果の検算とするという変形法の手順に対して、演算子法では geometry-matrix が検算の役目をなす．この場合、対称性というような考え方は一切不要である．

5．　剛節点における部材軸偏心の問題、弾性支承の問題、不完全剛節（ガセットプレート）の問題等を演算子法によると、ごく簡単に構造全体の解析の中に取りこむことができる．　これは、基本式が微分方程式の一般解に注目し、マトリクス表示による資料の完全分類の上に組み立てられているためである．

6．　演算子法による構造解析では、演算マトリクスの次数を適宜、節点での結合条件を予備的に処理することにより、低減させることができる．　その予備処理の操作によって全体としての姿を変形法にも応力法にもなしうる．　しかし、本法では、未知量として積分常数群に注目するという態度をとっている．　このほうが無理に材端の物理量に注目するよりも、演算の際に係数のからみ合いの度合が少なく、programing が簡単になしうるからである．　前にも述べたように、トラス構造では固有マトリクスに物理量をとり入れている．　これも直ちに次数を低減させて変形法の形にすることはできるが、この場合にも、上と同様のことが言える．

B. 移行手順の応用

演算子法における移行の手順を変形法にも応用できる。 この問題については、中川，成岡両氏が Reduction 法の手順を変形法に応用した研究を発表しておられる。[5] 移行という思想上の共通点がある以上、筆者等が用いた手順もこれと大差ないものである。[8)9)] 特記点をあげれば次のようである：

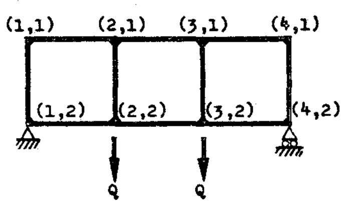
/. 構造物が単位構の集合体であるという考え方を変形法にとり入れる。 たとえば、図-1 のような単位構については、節点r1 と節点r2 との変位量を1つの固有マトリクスに見立てて節点でのつり合い式をマトリクス形式であらわせば、これより3つの単位構にわたる移行公式が得られる。 移行演算子の次数は6—by—6 となる。

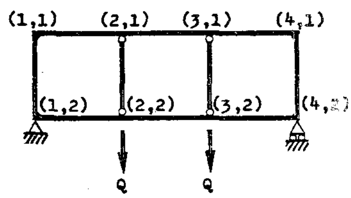
2. 3つの単位構にわたる移行は、2つの単位構のそれにくらべて面倒である。 ここで移行演算子の次数が2倍になることを覚悟すれば、節点 (r,1)，(r,2)，(r+1,1)，(r+1,2) の変位量を/つの単位構に見立てて他の単位構への完全な移行がなされる。 この手順については文献 10) を参照されたい。

3. 単位構から単位構への移行という手順は、代数学的には連立方程式の逐次消去を意味するが、この考え方により、更に複雑な体系の解析への道が開かれるものと考える。

C. 計算例

フイーレンデイール系及びローゼ系の構造についての計算例を示した。 移行演算子は6 次の正方マトリクスで、最終段階での逆行列の計算も6 次である。 パネル数はいくら多くなってもこのことに変わりはない。中間支点のあるときには簡単な処理を要する。各部材の寸法は/0cm × /0cm × 200cm，表中の数値には (cm) × (Q/E) を乗ずればよい。





Vierendeel Truss			Node	Lohse Truss		
u	v	θ		u	v	θ
3.674612	0.999205	1.948241	11	3.597302	0.999375	2.412440
2.707634	750.8389	1.553336	21	2.398201	1122.158	4.801648
0.966978	750.8389	-1.553336	31	1.199101	1122.158	-4.801648
0.000000	0.999205	-1.948241	41	0.000000	0.999375	-2.412440
0.000000	0.000000	1.956416	12	0.000000	0.000000	2.419936
0.966978	751.8381	1.558786	22	1.199101	1123.158	4.809144
2.707634	751.8381	-1.558786	32	2.398201	1123.158	-4.809144
3.674612	0.000000	-1.956416	42	3.597302	0.000000	-2.419936

〜〜〜 文 献 〜〜〜

1) 谷本 連続ばりの演算子法 ASCE誌 /964年/2月 2) 谷本 トラスの演算子法 ASCE誌 /966年6月 3) 吉沢，谷本 骨組構造に対する演算子法 中部支部講演概要 /966年//月
4) Gatewood B. E. & Norik O. 複雑な構造に対するTri-Diagonal Matrix 法 ASCE誌 /965年4月
5) 中川，成岡 変形法とReduction 法との相互関係について 土木学会論文集 /967年5月
6) 吉沢，谷本 演算子法による一般化した連続ばり /966年6月 7) 吉沢，谷本 剛節網目構造物の演算子法 /966年/2月 8) 吉沢，谷本 変形法への演算子法 (/) たわみ角式 /967年7月
9) 吉沢，谷本 演算子法による構造物の変位解析 (2) フイーレンデイール構 /967年7月
10) 吉沢，谷本 演算子法によるクラペイロンの定理 /964年/2月。

※ 文献6) 〜 文献10) は 信州大学工学部紀要 (文献8，9 は印刷中)。
※ 文献3)，文献5) 以外は 全部英文。