II－14　車両交通流の確率論的考察について

名古屋工業大学　正　員　渡辺新三
名古屋工業大学　学生員　○金丸次男

1. まえがき

道路交通量の測定を簡易化する手段として、スナップカメラを用いて交通量を推定する方法が筆者等※によって過去に発表されたが、本報告はその理論的裏付けの1つとして、道路交通流の空間分布との関係について確率論的考察を行ったものである。

※　スナップカメラによる交通量調査の簡易化について　米谷栄二、渡辺新三　道路1962.7.

2. 理論展開

道路上のある地点において、スナップカメラを用いて交通量を観測した場合、任意時刻t_1において観測点の前方ℓの距離に存在する走行車両が時刻$t_1 \sim t_1 + t$の間に観測点を通過する確率は、車両の走行速度の分布函数を$F(u_i)$とすれば、$1-F(u_i)$で与えられる。したがって時間tの間に観測点を通過する車両数の確率分布は任意時刻t_1における道路上の走行車両の空間分布がわかれば求められることになる。

かなり長い区間にわたって、他の道路よりの交通の出入がなく、かつ交通量がさほど多くない（走行車両を質点とみなして差支えない）道路においては、道路上の任意区間内に存在する走行車両数の分布はポアソン分布に従うことが示される。すなわち、ある任意時刻において、道路上の任意区間ℓ（メートル）上に存在する走行車両がm（台）である確率を$v_m(\ell)$で表わすものとすると、今道路上の単位長さあたりに存在する平均の走行車両数をρとして、

$$v_m(\ell) = \frac{(\rho\ell)^m}{m!} e^{-\rho\ell} \quad (ただし\ m=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

で示すことができる。(1)の母函数をつぎのように置いて

$$Q(\ell,x) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(\ell)\cdot x^m \tag{2}$$

(2)に(1)を代入すれば

$$Q(\ell,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\rho\ell)^m}{m!} e^{-\rho\ell}\cdot x^m = e^{\rho\ell(x-1)} \tag{3}$$

となる。

いま道路上の走行車両を1台任意に取り出したとき、その車両の走行速度uがちょうどu_iである確率$P_r(u=u_i)$、走行速度がu_i以上である確率$P_r(u \geq u_i)$および走行速度がu_iより小さい確率$P_r(u < u_i)$を(4)で表わす。

$$P_r(u=u_i) = p_i \tag{4-a}$$

$$P_r(u \geq u_i) = p_i + p_{i+1} + p_{i+2} + \cdots + p_N = \widetilde{p}_i \tag{4-b}$$

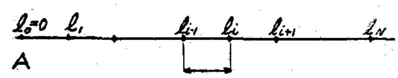
$$P_r(u < u_i) = 1 - \widetilde{p}_i = \widetilde{q}_i \tag{4-c}$$

ここにu_iは車両の走行速度の値を示す記号であり、すべての車両は(5)以外の値をとらないものと

する。

$$0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_i < \cdots < u_N \qquad (5)$$

図-1



この区間の車両はu_i以上の速度ならば、$a\sim a+t$の間にA点を通過する。u_{i-1}以下ならばA点を通過しない。

つぎに道路上の任意地点Aからl_iの距離にある地点をl_iで表わすものとすると、任意時刻aにおいて、l_i点に存在する車両が所要時間tでA点に到達するためには(6)を満足する速度u_iをもつ必要がある。

$$l_i = u_i \cdot t \qquad (6)$$

したがって、時刻aにおいて、$l_{i-1}\sim l_i$の間に存在する車両が時間$a\sim a+t$の間にA点を通過するためには(5)の仮定よりu_i以上の速度を持たなければならない。(図-1参照) そしてこの確率は(4-b)より$\widetilde{p}_i$である。

一方(l_i-l_{i-1})の距離にk台の車両が存在する確率は(1)より$v_k(l_i-l_{i-1})$であり、このk台のうちのr台が時間$a\sim a+t$の間にA点を通過する確率は$\binom{k}{r}\widetilde{p}_i^{\,r}\cdot\widetilde{q}_i^{\,k-r}$であるから、任意時刻$a$に道路上の任意区間($l_{i-1}\sim l_i$)に$k$台の走行車両が存在し、そのうちの$r$台がA点において$a\sim a+t$間の交通量として数えられる確率は$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(l_i-l_{i-1})(\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i)^k$の$x^r$の係数で与えられる。これは(2)において$l=l_i-l_{i-1}$, $x=\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i$と置き換えた(7)の$x^r$の係数に一致する。

$$Q(l_i-l_{i-1},\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i)=\sum_{k=0}^{\infty} v_k(l_i-l_{i-1})(\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i)^k \qquad (7)$$

$$=\exp\{\rho(l_i-l_{i-1})\widetilde{p}_i(x-1)\} \qquad (7)'$$

(7)′に(6)を代入して

$$Q(l_i-l_{i-1},\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i)=\exp\{\rho t(u_i-u_{i-1})\widetilde{p}_i(x-1)\} \qquad (8)$$

(8)は小区間($l_{i-1}\sim l_i$)について考えたのであるから、道路区間($l_0\sim l_N$)については、各小区間が独立であることより(9)のようになる。

$$\prod_{i=1}^{N} Q(l_i-l_{i-1},\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i)=\prod_{i=1}^{N}\exp\{\rho t(u_i-u_{i-1})\widetilde{p}_i(x-1)\}=\exp\{\rho t(x-1)\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})\widetilde{p}_i\} \qquad (9)$$

他方A点において交通量を観測した場合、時間tの間にA点を通過する車両数がちょうどn台である確率を$W_n(t)$で表わし、その母函数を$\Phi(x,t)$とおくと

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)x^n \quad (\text{ただし } n=0,1,2,\cdots) \qquad (10)$$

しかるに、A点での時間tの間の交通量と道路の各小区間から所要時間t以下でA点に到達する車両数とは等しいから、(9)=(10)でなければならない。

$$\Phi(x,t)=\prod_{i=1}^{N} Q(l_i-l_{i-1},\widetilde{p}_i x+\widetilde{q}_i)=\exp\{\rho t(x-1)\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})\widetilde{p}_i\} \qquad (11)$$

(11)において$u_0=0$として$\sum(u_i-u_{i-1})\widetilde{p}_i$を計算すると

$$\sum_{i=1}^{N}(u_i-u_{i-1})\widetilde{p}_i=\sum_{i=1}^{N}u_i p_i$$

したがって(11)は

$$\Phi(x,t)=\exp\{\rho t(x-1)\sum_{i=1}^{N}u_i p_i\}=\exp\{\lambda t(x-1)\} \tag{12}$$

ただし $\lambda=\rho\sum_{i=1}^{N}u_i p_i$ (13)

となり、(12)はポアソン分布の母函数と一致する。しかるに(11)において $\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n(t)x^n$ とおいたのであるから

$$w_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \tag{14}$$

すなわち時間tの内にA点を通過する車両数がちょうどn台である確率$w_n(t)$はポアソン分布をなす。

このことは交通の空間分布がポアソン分布に従うような道路交通流では、交通の時間分布もまたポアソン分布に従うことを示しており、さらにこの証明は交通の空間分布をポアソン分布以外の他の適当な分布で置き換えたときに、交通の時間分布が導き出されることを示している。

また(13)において走行車両の空間平均速度を$\bar{u}$で表わせば、$\lambda=\rho\sum_{i=1}^{N}u_i p_i=\rho\cdot\bar{u}$ となり

$$\bar{u}=\lambda/\rho \tag{15}$$

これによって、空間平均速度と交通量と交通密度との関係が上記の方法によっても証明される。

3. 実測結果

走行車両の空間分布および走行速度について行った調査結果の一部をここに掲載し、交通流の時間分布および交通量の観測結果については、本発表時に発表させていただくこととする。

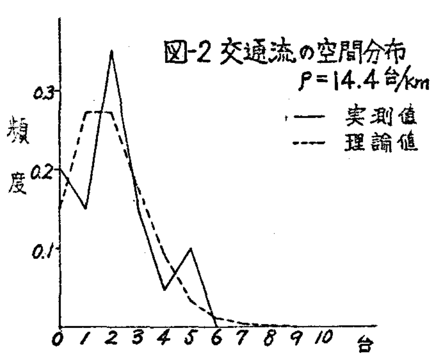


図-2 交通流の空間分布 $\rho=14.4$台/km

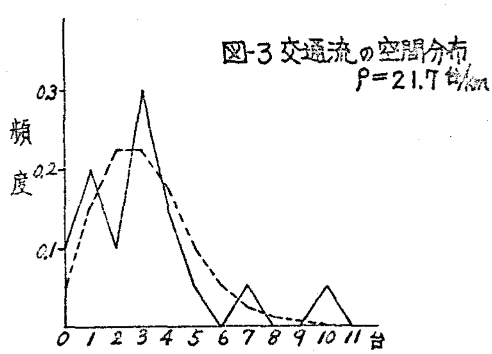


図-3 交通流の空間分布 $\rho=21.7$台/km

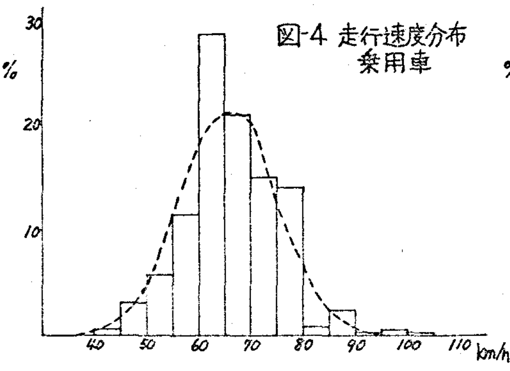


図-4 走行速度分布 乗用車

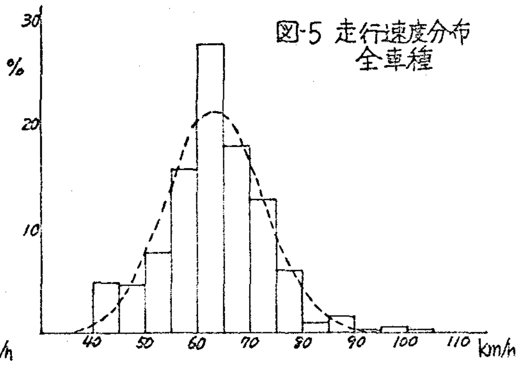


図-5 走行速度分布 全車種