

名古屋工業大学 正 員 荒井利一郎

名古屋工業大学 学生員 〇水谷 敏則

1. はしがき

薄肉円断面エルボー材の両端に材軸面内の曲げモーメントが作用したとき、その中央断面付近で断面の扁平化が現われるために弾性範囲内ですでに曲げモーメントの増加割合よりも曲率の増加割合の方が漸次的に大きくなり、いわゆる弾性屈伏状態が生ずる。

この屈伏段階において薄肉円断面エルボー材はまず普通のハリ理論によって変形し、さらにこの状態から変形して中央付近に着しい断面の扁平化を生ずるものであるとして、後者による各変位をZernaの近似曲げ理論から求め、境界条件からでは決定の困難な諸定数を位置エネルギー極小の原理(Principle of minimum total potential energy)を用いて決めた後、曲げモーメントと部材断面力との釣合を表わした式にそれら諸定数を代入することにより曲げモーメントと曲率の変化との関係を見出すことにした。

2. 近似曲げ理論

円筒曲面に関するZernaの近似曲げ理論¹⁾²⁾によれば適当な簡化により次の様な関数型に関する4階複素微分方程式となる。ただし式中の諸記号は図-1, 2に示し、 $\chi = R\theta/a$ として $\partial/\partial\chi = \xi$, $\partial/\partial\phi = \eta$ とする。

$$\Delta\Delta\psi - 4\lambda^2 k^2 \psi'' = 0$$

$$\text{ただし } \psi = w + \lambda K \Phi$$

$$k^2 = a\sqrt{3(1-\mu^2)}/2\pi$$

$$K = (a/\chi)^2 \cdot \sqrt{12(1-\mu^2)}/E$$

$$N_x = \Phi''; N_\phi = \Phi''; N_{x\phi} = N_{\phi x} = -\Phi'';$$

$$M_x = B/a^2 \cdot (w'' + \mu w''); M_\phi = B/a^2 \cdot (w'' + \mu w'');$$

$$M_{x\phi} = M_{\phi x} = B/a^2 \cdot (1-\mu) w'';$$

$$B = Et^3/12(1-\mu^2)$$

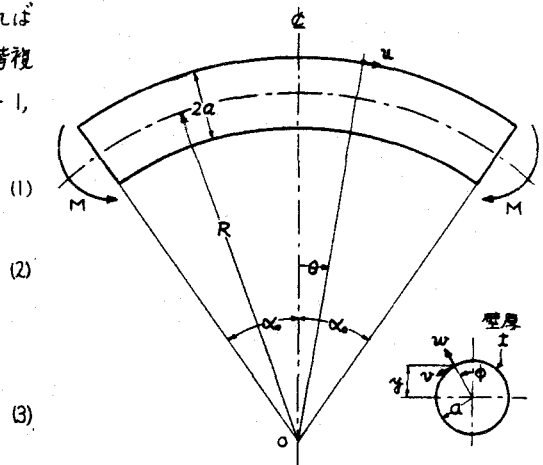


図-1

いま中央断面で着しい扁平化が生じるものとして(1)式の解を次のようにおく。

$$\psi = \sum C_{mn} e^{m\chi} \cos n\phi$$

(4)式を(1)式に代入すると特性方程式として

$$(m^2 - n^2)^2 - 4\lambda^2 k^2 n^2 = 0$$

これを解いて次の4根が得られる。

$$m_1 = -\alpha_1 + i\beta_1; m_2 = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$\text{ただし } \alpha_1 = \sqrt{n^2 + k^2 + n^2/12} \pm k/\sqrt{2}$$

$$\beta_1 = k/\sqrt{2} \pm \sqrt{n^2 + k^2 - n^2/12}$$

従って4つの積分定数をもつ解が得られるが、両端

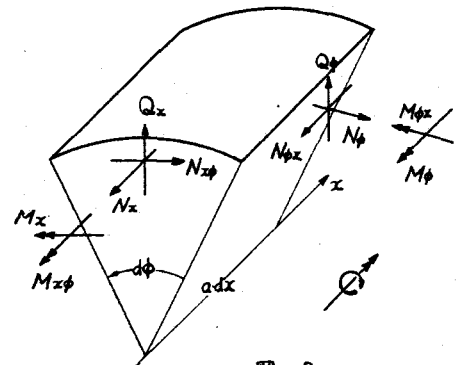


図-2

では断面の扁平化の影響がほとんど現われないと考えれば指数が正の項 ($e^{i\alpha x}$, $e^{i\beta x}$) の積分定数は恒等的に零となるべきであるからこの場合の解として

$$\Psi = \sum \{ C_{1n} e^{-\alpha_n x} (\cos \beta_n x - \lambda \sin \beta_n x) + C_{2n} e^{-\alpha_n x} (\cos \beta_n x + \lambda \sin \beta_n x) \} \cos n\phi \quad (7)$$

(2) オ 1 式によって (7) 式を実部と虚部とに分けると

$$\left. \begin{aligned} W &= \sum \{ e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \cos \beta_n x + C_{2n}^0 \sin \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \cos \beta_n x - C_{2n}^1 \sin \beta_n x) \} \cos n\phi \\ K\Phi &= \sum \{ e^{-\alpha_n x} (-C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x) \} \cos n\phi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

従って (3) 式により各断面力は

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \sum \{ -n^2/k \cdot [e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x)] \} \cos n\phi \\ N_\phi &= \sum \{ 1/k \cdot [e^{-\alpha_n x} (-C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x)] \} \cos n\phi \\ N_{x\phi} &= \sum \{ n/k \cdot [e^{-\alpha_n x} (-C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x)] \} \sin n\phi \\ M_x &= B/\alpha^2 \sum \{ [e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \cos \beta_n x + C_{2n}^0 \sin \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \cos \beta_n x - C_{2n}^1 \sin \beta_n x)] \\ &\quad - n^2 \mu \{ e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \cos \beta_n x + C_{2n}^0 \sin \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \cos \beta_n x - C_{2n}^1 \sin \beta_n x) \} \} \cos n\phi \\ M_\phi &= B/\alpha^2 \sum \{ -n^2 \{ e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \cos \beta_n x + C_{2n}^0 \sin \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \cos \beta_n x - C_{2n}^1 \sin \beta_n x) \} \\ &\quad + \mu \{ e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \cos \beta_n x + C_{2n}^0 \sin \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \cos \beta_n x - C_{2n}^1 \sin \beta_n x) \} \} \cos n\phi \\ M_{x\phi} &= B/\alpha^2 (1-\mu) \sum \{ -n \{ e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \cos \beta_n x + C_{2n}^0 \sin \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \cos \beta_n x - C_{2n}^1 \sin \beta_n x) \} \} \sin n\phi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

又、 $U/a = E_x = (N_x - \mu N_\phi)/D(1-\mu^2)$ 及 $U/a + V/a = \gamma_{x\phi} = 2N_{x\phi}/D(1-\mu)$ より U 及 V は

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum \{ \alpha/k E_t \cdot [n^2 \{ e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x) \} \\ &\quad + \mu \{ e^{-\alpha_n x} (-C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x) \} \} \} \cos n\phi \\ V &= \sum \{ n\alpha/k E_t \cdot [(2+\mu) \{ e^{-\alpha_n x} (-C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x) \} \\ &\quad - n^2 \{ e^{-\alpha_n x} (-C_{1n}^0 \sin \beta_n x + C_{2n}^0 \cos \beta_n x) + e^{-\alpha_n x} (C_{1n}^1 \sin \beta_n x + C_{2n}^1 \cos \beta_n x) \} \} \} \sin n\phi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{ただし } C_{1/2}^P = -\alpha_{1/2} C_{1/2}^{P-1} \pm \beta_{1/2} C_{1/2}^{P+1}; \quad C_{3/4}^P = -\alpha_{3/4} C_{3/4}^{P-1} \mp \beta_{3/4} C_{3/4}^{P+1} \quad (11)$$

普通のハリ理論による各変位及び各断面力は、材軸の曲率の増加量を c とすれば

$$\left. \begin{aligned} u &= c\alpha^2 x \cos \phi; \quad v = c\alpha^2 x/2 \cdot \sin \phi; \quad w = -c\alpha^2 x/2 \cdot \cos \phi; \\ N_x &= Et c \alpha \cos \phi; \quad N_\phi = 0; \quad N_{x\phi} = 0; \quad M_x = -Et^3 c/12 \cdot \cos \phi; \quad M_\phi = 0; \quad M_{x\phi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここにおいて、薄肉円断面エルゴ-材は先ず普通のハリ理論によって変形し、さらにこの状態から変形して中央付近に著しい断面の扁平化を生ずるものと考えれば、全変位及び全断面力は (12) 各式と (2) オ 1 式及び (9) (10) 各式との夫々の和によって表わされるものである。ただし後者については $n \geq 2$ の項を加算するものとする。

3. 境界条件

両端での境界条件は (7) 式ですでに考慮されているから、中央断面での境界条件について調べると

$$\left. \begin{aligned} [u]_{x=0} &= 0 \quad \text{より} \quad n^2 (C_{1n}^1 + C_{2n}^1) + \mu (C_{1n}^0 + C_{2n}^0) = 0 \\ [\partial w / \partial x]_{x=0} &= 0 \quad \text{より} \quad C_{1n}^1 + C_{2n}^1 = 0 \\ [N_{x\phi}]_{x=0} &= 0 \quad \text{より} \quad C_{1n}^1 + C_{2n}^1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

従って (8) (9) (10) 式の $\cos n\phi$ ($\sin n\phi$) の各項の積分定数は夫々 C_n^i ($n=2,3,\dots$) の関数として表わされる。

4. 位置エネルギー

材軸方向の伸び歪による歪エネルギー W_{ϵ} は α の項に対して v, w の自乗及び積を無視すると

$$W_{21} = EtC^2 a^2 / 2 \cdot \int_0^{R/a} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos \phi + 2a w \cos \phi - 2a v \sin \phi \cdot \cos \phi) d\phi \cdot dx \quad (14)$$

モーメント変による歪エネルギー W_{22} は

$$W_{22} = 1/2 \cdot \int_0^{R/a} \int_0^{2\pi} (M_x K_x + M_\phi K_\phi + M_{x\phi} K_{x\phi} + M_{\phi x} K_{\phi x}) a d\phi \cdot dx \quad (15)$$

ただし $K_x = (w'' - a \cos \phi R \cdot u') / a^2$; $K_\phi = (w'' - v') / a^2$; $K_{x\phi} = (w' - v') / a^2$; $K_{\phi x} = (w' - a \cos \phi R \cdot u') / a^2$

曲げモーメント(外力)のなす仕事 W_e は

$$W_e = R \alpha_0 C M \quad (16)$$

位置エネルギー $W = W_{21} + W_{22} - W_e$ に節2で求めた各変位及び各断面力を代入すれば、 W は ζ_1^n ($n=2, 3, \dots$) の関数として表わされるからここで位置エネルギー極小の原理を用いると

$$\partial W / \partial \zeta_1^n = 0 \quad (n=2, 3, \dots) \quad (17)$$

07式により ζ_1^n が決定される。

5. 曲げモーメントと曲率の変化との関係

中央断面において各断面力と曲げモーメントとの釣合条件式を書く

$$M = \int_0^{2\pi} [N_x y - M_x \cos \phi]_{x=0} a d\phi \quad (18)$$

N_x に対して M_x は微小であるから無視し、節2で求めた各断面力及び各変位を代入すると曲げモーメントは ζ_1^n の関数として表示されるから、前節で決定された ζ_1^n を代入すれば曲げモーメントと曲率の変化との関係が見出される。

2, 3の例についての計算結果 ($n=2$ まで) を図-3に示す。なお図-4は $q/a=10, R/a=10$ の例について最大曲げモーメントが作用しているときの断面の変形状態を示したものである。

6. あとがき(結論にかえて)

Timoshenkoの曲りハリ理論によると断面力 (N_x) の分布は双曲線的になるものであるが、本稿では真直ぐバリの理論によるもの即ち断面力 (N_x) の分布が直線的であるものとし、又2次的な変形としても部分的には真直ぐなハリとして計算を進めているために R/a の影響がほとんど現われていない。しかし $n=3$ の項まで取ることにより断面力 (N_x) の分布に修正が加えられ曲りハリ理論に近い断面力 (N_x) の分布が得られるものと推定される。

参考文献

- 1) Ingenieur-Archiv XX. Band 1952 S.357~362
- 2) 土木学会誌 第43巻6号 講座「構造力学(四)」

