

信州大学工学部 正員

○ 吉沢孝和

正員 工博理博 谷本勉 助

I. まえがき

連続系骨組構造の解析に演算子法(operational method)を適用すると、連立方程式や高次の逆マトリクスが介入せず、系統的な演算により、極めて能率的に解析が進められる。その一要因は取り扱う系の物理量・力学量の完全分類の上に解析が展開されているという点にある。本法の解析手順は在来の理論にも簡単に応用できる。これを

Clapeyron の三連モーメント式に例をとれば、図-1 に示す連続梁において、支点モーメントの2組ずつを列ベクトルにまとめ、2本の3連モーメント式をマトリクス形に書きだせば簡単な変形により次のような移行公式(shift formula)が得られる：

図-1 連続梁

$$\text{右移行公式: } N_{r+1} = L_r N_{r-1} + P_r + S_r + T_r, \quad (1)$$

$$\text{左移行公式: } N_{r-1} = L'_r N_{r+1} + P'_r + S'_r + T'_r. \quad (2)$$

N_{r-1} , N_{r+1} は図に併記したように $r-1$, $r+1$ 径間の支点モーメントで、これをそれぞれの径間の固有マトリクス(eigenmatrix)と呼ぶ。 L , P , S , T 等の記号は移行演算子(shift operator)を示し、順に固有マトリクス、荷重項、支点沈下応力、温度応力を他の径間に移行させるものである。例えば(1)の L_r は次の値になる：

$$L_r = \frac{1}{k_r k_{r+1}} \begin{bmatrix} -k_{r+1}, & -2(1+k_r)k_{r+1} \\ 2(1+k_{r+1}), & -k_r + 4(1+k_r)(1+k_{r+1}) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$k_r = \frac{I_{r-1}}{I_r} \frac{\ell_r}{\ell_{r-1}}, \quad k_{r+1} = \frac{I_r}{I_{r+1}} \frac{\ell_{r+1}}{\ell_r}, \quad (I = \text{断面2次モーメント}, \ell = \text{径間長}). \quad (4)$$

公式(1),(2)によって任意の径間の固有マトリクスで系全体の力学量をあらわすことができる。これに両端の境界条件を与えて解をうる。このような手順を用いる事により

1. 径間数に関係なく移行の最終段階で1または2次の逆マトリクスの計算だけで解が得られる,
2. 移行はすべて2次のマトリクス演算で規則的に進められる,
3. 得られた解の検算が、他の任意の固有マトリクスを用いて簡単にできる

等の長所が見られる。

II. 演算子法の概要と基本式

演算子法は次のような基盤の上に組み立てられている。構造物の解析はマトリクス演算子により完全に系統化され、演算の途中において力学的考案を一切必要としない。

1. 個々の構成部材の力学的挙動を表現する微分方程式の一般解を基本式としてゐる、
2. 演算規則の組み立てが資料の完全分類の上になされている、
3. 構成部材に起こりうるすべての図形的・力学的条件を完全に処理して一般化した上で、系全体の解析が進められる、

演算子法の各種の構成部材の基本式の一例を示せば次のようである：

構成部材	基本式	記号
普通の梁	$w = \frac{l^3}{6EI} L / \rho \quad \rho^2 \quad \rho^3 \rfloor N$	l = 部材長, $\rho = \frac{x}{l}$ 無次元座標座標,
弾性床上の梁	$w = L \begin{bmatrix} e^{\beta x} \cos \beta x & e^{\beta x} \sin \beta x & e^{-\beta x} \cos \beta x & e^{-\beta x} \sin \beta x \end{bmatrix} N$	EI, EA, GJ = 曲げ, 伸び, ねじりに対し,
フック法則に従う棒	$u = \frac{l}{EA} L / \rho \rfloor L$	w = ねじり, u = 伸び, ϕ = ねじれ角,
ねじりを受ける棒	$\phi = \frac{\rho^2}{GJ} L / \rho \rfloor M$	$\beta = \sqrt{k/4EI}$, k = 地盤係数,
棒の曲げ振動	$w = \frac{l^2}{EI} L \begin{bmatrix} \cos \rho x & \sin \rho x & \cosh \rho x & \sinh \rho x \end{bmatrix} M e^{i\omega t}$	$\rho^4 = \frac{\gamma A \omega^2}{EI g}$, $m^2 = \frac{\gamma \omega^2}{E g}$, $n^2 = \frac{\gamma \omega^2}{G g}$,
棒の縦振動	$u = \frac{l}{EA} L \begin{bmatrix} \cos m x & \sin m x \end{bmatrix} L e^{i\omega t}$	γ = 単位重量, g = 重力加速度,
棒のねじり振動	$\phi = \frac{l^2}{GJ} L \begin{bmatrix} \cos n x & \sin n x \end{bmatrix} M e^{i\omega t}$	ω = 振動数, t = 時間.

固有マトリクス: $L = \{C_1 \ C_2\}$, $M = \{C_3 \ C_4\}$, $N = \{C_5 \ C_6 \ C_7 \ C_8\}$.

III. 応用例 I. 一連続梁

III A. 荷重項 — 図-2 に示す構成区間の両端の固有マトリクスの間には, 次の関係がある:

$$N' = N + K. \quad (5)$$

これはこの区間の荷重項で, 図のような荷重条件では

$$K = K_p + K_q + K_m, \quad (6)$$

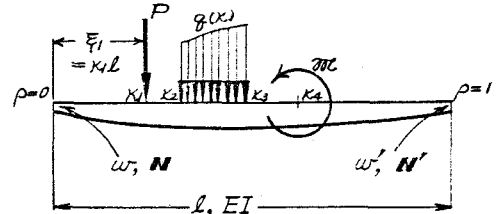


図-2 構成区間

ただし

$$\left. \begin{aligned} K_p &= P \{-\eta^2 \ 3K_1^2 - 3K_1 \ 1\}, \quad K_q = \int_{K_2}^{K_3} q(x) \{-x^3 \ 3x^2 - 3x \ 1\} dx, \\ K_m &= \frac{3}{2} m \{K_2^2 - 2K_4 \ 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

III B. 移行演算子 (shift operator) — 隣り合う区間の固有マトリクスは移行演算子で結ばれる。

$$N_r = S_r N'_{r-1}, \quad N'_{r-1} = S'_r N_r. \quad \begin{matrix} [r-1 \text{ 区間}] & [r \text{ 区間}] \\ N'_{r-1} \rightleftharpoons N_r \end{matrix} \quad (8)$$

左移行演算子 S'_r の一例:

$$S'_r = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\phi^2}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi^2}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\phi}{\beta} & \phi & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{aligned} & \left[\lambda = \mu = \infty \right] \quad \left[\lambda = \infty \right] \quad \left[\mu = \infty \right] \\ & \sigma_r = \frac{l_r}{L_r}, \quad \beta_r = \frac{EI_r}{EI_{r-1}}, \quad \lambda_r = \frac{6kr_r EI_r}{l_r^3}, \quad \mu_r = \frac{2m_r EI_r}{l_r} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ⅢC. 境界マトリクス — 境界条件は $BN_1 = 0$ (左端), $B'N'_n = 0$ (右端) で与えられる。 B, B' は境界マトリクスで, λ, μ の値のとり方ですべての境界条件が与えられる。例えば B の一般形は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\mu & 0 \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{c} \text{自由端} \\ \text{固定端} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{自由端} \\ \text{固定端} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{自由端} \\ \text{固定端} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{自由端} \\ \text{固定端} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{自由端} \\ \text{固定端} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{自由端} \\ \text{固定端} \end{array} \quad (10)$$

ⅢD. Connection chart, Shifting chart

ラーメン・格子等の解析では, connection chart を用いて演算子を系統的に得ることができる。連続梁のような単純な直線系では shifting chart によって移行演算の姿が図式表示される。

ⅢE. Geometry Matrix

9径間連続梁の解は

$$[N] = [G][K] \quad (11)$$

の形で得られる。 $[N]$ は系全体の固有マトリクス, $[K]$ は荷重項で, いずれも $4n$ 個の列ベクトルである。 $[G]$ は $4n$ 次の正方マトリクスで geometry matrix と呼ばれる。これは系の構造組成のみによって得られるもので, ใดなる荷重条件についても直ちに系の力学量・図形歪を与えうる。

Ⅳ. 応用例 2.

移行演算は統一された繰り返し演算によって逆められ, 逆マトリクスの計算はその最終段階で一因だけ必要になる。振動解析ではこれが行列式の固有値計算になる。若干の例を図-3 に示す。 $[\]$ 中の数字は逆マトリクスの次数を示す。

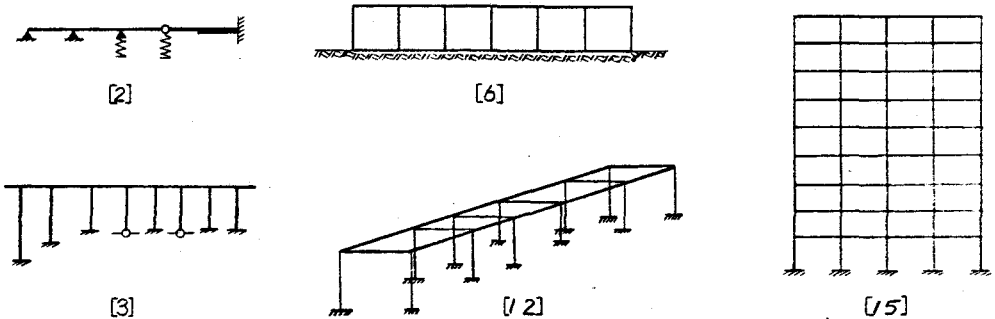


図-3. 演算子法による各種の系の逆マトリクスの次数 ($[\]$ 内の数字)

Ⅴ. 付言

演算子法では, 例えば格子と平面ラーメンとの解析は, 静力学的にも動力学的にも同一物に帰する。Transfer matrix method においては移行演算が state vector におかれてゐるために, 直線系には便利だが細目系には不便を伴うと考えられる。また, 応力法・変形法等は state vector の一部分だけを基礎にしている。いずれも解析の出発点における足場が完全でないように思われる。