

Reduction 法によるアーケの解析

名古屋大学工学部

成岡昌夫

"

桑山いづる

[1] まえがき

ここで述べる Reduction 法については、土木学会誌 1965, 7月号において詳しく説明されている。この方法は順次次元数の小さなマトリックスの計算を行うことにより各変形量と断面力を求めることができる。したがって、この方法は容量が少ない電子計算機でも、各演算段階において、その都度、各マトリックスの要素を外部に出すことにより、相当大きな構造物でも解くことができる。

しかも、この方法は同時に各変形量と断面力を求めることができるという点においてすぐれている。

この方法による演算過程を説明しよう。基本的には、初期条件を与えることにより、そこに生じた未知量をそれぞれの部材の諸性質を利用することにより、一方の部材端へ順次移行し、その端部における境界条件を使うことにより、この未知量を求めることになる。

ここで問題になるのは、ラーメン、連続梁のような構造様式に見られる数層にわたり、また、中間に反柱、あるいは反梁が介在する場合、どのようにして演算にこれらを組み入れるかである。

例えば、変断面連続梁において単に、部材の諸性質だけによつて、各量に変化する部分はフェルドマトリックスを使用することによつて各量が移行し、反梁が介在する部分へくると新たに、反力未知量として導入され、この部分において鉛直変位量が0という条件が加わるのである、したがって、最終的には方程式の数が未知量の数と一致することになる。

次に、中間に反柱やバネが存在する場合、その反柱やバネが分担する断面力は、その奥の変位量によつて表わすことができるので、これらのいわゆるバネ弾性係数を新たにマトリックスとして、ブランクマトリックスに組み入れることによつて、各量を移行させるのである。

[2] アーケの Reduction 法による解析

アーケの場合は上述したフェルドマトリックスとブランクマトリックスだけでは解くことができない、さらにローテーションマトリックス (Rotation Matrix) も導入する必要がある。これは断面の各変位量および断面力を回転させることによつて、これらを移行させるマトリックスである。

図1図のように水平方向からの左回り回転角を正に定義しておくと、ローテーションマトリックスは式(2)のようになる。

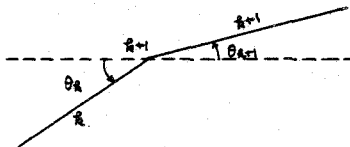
ここで、外力はモーメント M_{a+1}^S 、垂直力 Q_{a+1}^S および水平力 N_{a+1}^S である。

演算過程は

$$q_1(0) = 0, q_2$$

$$q_1(2) = F_1 \cdot 0, q_2$$

図(1)



一般に格変長について

$$q_k(l) = F_k \cdot Q_k \cdots F_1 \cdot Q_1 \cdot q_0$$

ここで F_i : フェルドマトリックス (Feldmatrix)

O_i : ローテーションマトリックス (Rotation matrix)

q_0 : 初期ベクトル (Anfangsvektor)

フェルドマトリックス

$$b_{21} = -\frac{Q_k}{L}$$

$$b_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_k}{L} \right)^2 \frac{I_k}{I_k}$$

$$b_{23} = \frac{1}{6} \left(\frac{Q_k}{L} \right)^3 \frac{I_k}{I_k}$$

$$b_{24} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q_k}{L} \right)^2 \frac{I_k}{I_k}$$

$$b_{25} = \frac{Q_k}{L}$$

$$b_{26} = -\frac{Q_k}{L} \frac{I_k}{I_k}$$

$$\begin{bmatrix} u_k(\frac{L}{L}) \\ w_k(\frac{L}{L}) \\ y_k(\frac{L}{L}) \\ \varphi_k(\frac{L}{L}) \\ Q_k(\frac{L}{L}) \\ N_k(\frac{L}{L}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{16} & u_{k0} \\ 0 & 1 & b_{22} & b_{24} & b_{25} & 0 & w_{k0} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & b_{35} & 0 & y_{k0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{45} & 0 & \varphi_{k0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Q_{k0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & N_{k0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k(0) \\ w_k(0) \\ y_k(0) \\ \varphi_k(0) \\ Q_k(0) \\ N_k(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots (1)$$

ここで l : 格変長 (距離)

I : 断面二次モーメント

F : 断面積

これを簡単にすると

$$q_k(\frac{L}{L}) = F_k \cdot q_k(0)$$

F_k : フェルドマトリックス

ローテーションマトリックス

$$a_{11} = \cos(\theta_k - \theta_{k+1})$$

$$a_{12} = -\sin(\theta_k - \theta_{k+1})$$

$$a_{13} = \sin(\theta_k - \theta_{k+1})$$

$$a_{14} = \cos(\theta_k - \theta_{k+1})$$

$$a_{25} = a_{11} = a_{16}$$

$$a_{26} = a_{12} = -a_{13}$$

$$\begin{bmatrix} u_{k+1}(0) \\ w_{k+1}(0) \\ y_{k+1}(0) \\ \varphi_{k+1}(0) \\ Q_{k+1}(0) \\ N_{k+1}(0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{28} & a_{29} & a_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k(\frac{L}{L}) \\ w_k(\frac{L}{L}) \\ y_k(\frac{L}{L}) \\ \varphi_k(\frac{L}{L}) \\ Q_k(\frac{L}{L}) \\ N_k(\frac{L}{L}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

$$Q_{k+1} = M_{k+1}$$

$$Q_{k+1} = Q_{k+1} \cos \theta_{k+1} + N_{k+1} \sin \theta_{k+1}$$

$$Q_{k+1} = -Q_{k+1} \sin \theta_{k+1} + N_{k+1} \cos \theta_{k+1}$$

本法を用いて固定アーチを解いた

結果を図2に示してある。

この結果を弾性橋梁の結果と、変形法による解いた結果と比較すると、ほぼ変形法による値と一致し弾性橋梁の結果ともきわめてよく一致している。



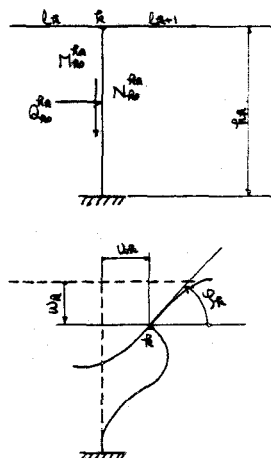
図2 起拱梁の曲げモーメント影響線

[3] 連続アーチの Reduction 法による解析

弾性変位を持つ連続アーチは、三浦博士の“九変位の定理”および“W Stempel” “Der durchlaufende Bogensträger” によって解かれているが、これとは別に本法のアーチの解析を

らに拡張して解いてやることにする。11に於いて述べたように、これに中間に支座が存在するため、この支座をいれやるために、変換する必要があるのである。

いま、図(3)のように格架が水平方向に u_R 、垂直方向に w_R 、および回転 φ_R の変位が生じているものとすると、これによるバネマトリックスは式(3)のようになる。これと式(2)のローテーションマトリックスを組み合わせることにより、この支座のフロンクマトリックスが得られる。



図(3)

よって

$$C_{11} = 6 \left(\frac{l_2}{l_{2+1}} \right)^2 \frac{I_R}{L}$$

$$C_{11} = 12 \left(\frac{l_2}{l_{2+1}} \right)^3 \frac{I_R}{L}$$

$$C_{23} = \left(\frac{l_2}{l_{2+1}} \right) \frac{I_R l_2}{L}$$

$$C_{13} = 4 \frac{l_2}{l_{2+1}} \frac{I_R}{L}$$

$$C_{33} = 6 \left(\frac{l_2}{l_{2+1}} \right)^2 \frac{I_R}{L}$$

$$C_{14} = M_{R0}^x$$

$$C_{15} = -N_{R0}^x$$

$$C_{16} = Q_{R0}^y$$

$$\begin{bmatrix} M_{R0}^x \\ Q_{R0}^y \\ N_{R0}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{11} & 0 & -C_{13} & C_{14} \\ 0 & -C_{22} & 0 & C_{15} \\ -C_{31} & 0 & -C_{33} & C_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R \\ w_R \\ \varphi_R \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (3)$$

支座におけるフロンクマトリックス

$$\begin{aligned} d_{11} &= -C_{11} \cos \theta_{2+1} \\ d_{12} &= -C_{11} \sin \theta_{2+1} \\ d_{51} &= C_{23} \cos \theta_{2+1} \sin \theta_{2+1} - C_{13} \cos \theta_{2+1} \sin \theta_{2+1} \\ d_{52} &= -C_{23} \sin \theta_{2+1} \sin \theta_{2+1} - C_{13} \cos \theta_{2+1} \cos \theta_{2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_{R0}(0) \\ w_{R0}(0) \\ \varphi_{R0}(0) \\ M_{R0}^x(0) \\ Q_{R0}^y(0) \\ N_{R0}^x(0) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & 1 & 0 & 0 & d_{17} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & 0 & d_{55} & d_{56} & d_{57} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & 0 & d_{65} & d_{66} & d_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_R \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ w_R \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ \varphi_R \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ M_R \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ Q_R \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ N_R \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (4)$$

以下同様。

式(4)が連続アーチの支座におけるフロンクマトリックスとなる。この場合の計算過程も単一アーチの場合と等しく同様である。