I－2　　道路橋の衝撃に関する確率的2，3の考察

金沢大学工学部　正　員　　喜内　敏
金沢大学大学院　学生員　○大辻秀明

1. まえがき

道路橋の衝撃は古くから載荷長による逓減関数として与えられ，わが国では　$i=20/(50+\ell)$ を用いその外ドイツ，アメリカにおいても同様である。　これは従来多くの理論解析，実験がなされてきているが特にこれといった決め手がないため，すなわち橋梁形式，道路状態，交通事情などが一個一個の橋梁に関して相違しているためである。　動的荷重が橋に載荷された場合橋の振動はそれぞれの荷重による振動の合成振動としてあらわされるがそれぞれ個々の振動の位相差によって橋の合成振動の振動状態が異なってくる。　ここでは橋に作用する周期的荷重の位相差が統計的にしか処理しえないような全くランダムなものであるとしてこの位相差を確率変数と考え確率論的立場から衝撃係数を論じようというものである。

2. 仮定

(1)　橋は等断面単純梁とする。

(2)　個々の荷重は走行による慣性力を無視し，ただ単に力Pとする。

(3)　荷重は載荷位置において自重の他に周期力　$P_i=P_0\sin(\omega t+\delta_i)$　を橋に与えるものとする。

(4)　周期力の振動数ωはどの周期力についても一定とし位相差 δ_i は全くランダムなものとする。

3. 橋桁のたわみ振動

荷重及び周期力の橋桁に及ぼす力は

$$P_i=P+P_0\sin(\omega t+\delta_i)=P+\alpha P\sin(\omega t+\delta_i) \qquad (1)$$

周期力が一個載荷した時のたわみ曲線を　$Y=q_n\sin(n\pi x/\ell)$　と仮定するとこの時の一般力は

$$Q_n=P_0\sin(n\pi x/\ell)\sin(\omega t+\delta_i) \qquad (2)$$

一般座標 q_n に関する橋桁の運動方程式は

$$\ddot{q}_n+2\beta_n p_n\dot{q}_n+p_n^2 q_n=\frac{2P_0 g}{w}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin(\omega t+\delta) \qquad (3)$$

ここで　β_n：減衰定数　p_n：橋桁のn次振動数　ℓ：載荷長　g：重力の加速度　w：橋桁重量

(3)の微分方程式の特解として強制振動の項のみをとり二次以下高次の振動を省略すると

$$Y=q_1\sin(\pi x/\ell)$$

解は

$$q_1=\frac{2P_0 g\sin(\pi x/\ell)}{w\sqrt{(p^2-\omega^2)-4\beta^2p^2\omega^2}}\cdot\sin(\omega t+\varphi_1)$$

$$=\delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}\sin\frac{\pi x}{\ell}\sin(\omega t+\varphi_1) \qquad (4)$$

ここで　$\alpha'=\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right\}^2+4\beta^2\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}$，　$\varphi_1=\delta_1-\gamma$，　$\gamma=\tan^{-1}\left\{\frac{2\beta(\omega/p)}{1-(\omega/p)^2}\right\}$

周期力が二個以上の場合は重ね合せの原理を用いて，スパン中央点の動たわみは

$$y_c = \delta_{st}\frac{\alpha}{\alpha'}\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega t + \varphi_i) \tag{5}$$

ここで　$\alpha = \dfrac{P_0}{P}$　,　$a_i = \sin\dfrac{\pi x_i}{\ell}$

4. 確率論的考察

式(5)において時刻tを定めればスパン中央点のたわみは位相差φ_iのみの関数となり，周期力の位相差δの分布がランダムであれば　$\varphi = \delta - \gamma$　であるからφの分布もランダムである。　もし位相差がなければ　$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_i = 0$　で，合成振幅の最大値は　$\left|\delta_{st}(\alpha/\alpha')\sum_{i=1}^{n} a_i\right|$　であるが，φ_iはランダムな値であるからそのような値をとる事は非常にまれである。　そこで

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\omega t + \varphi_i) = r_i \sin(\omega t + \theta_i) \tag{6}$$

となるような変数rを用いてr_iが任意のrよりも小さな値をとるような確率$P_r(r_i < r)$を考えれば，これはスパン中央点のたわみがr_iに変換されたことになり周期力による動たわみの最大値が任意のy_cより小さな値をとる確率となる。　確率P_rの計算には　(i)幾何学的関係式　(ii)Kluyverのベッセル関数の積の積分表示式　(iii)Rayleighの式の三方法があるが計算の便宜上(iii)を用いる。

Rayleighによれば

$$P_r(r_i < r) = 1 - \exp\left(\frac{-r^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i a_i^2}\right) \tag{7}$$

ここで　$n_i = 1$　,　$a_i^2 = \sin^2\left(\dfrac{\pi x_i}{\ell}\right)$

確率P_rを任意に定めれば

$$r = \sqrt{-\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \ln(1 - P_r)} \tag{8}$$

スパン中央点の最大動たわみは　$\sin(\omega t + \varphi_i) = 1$　の時であるから

$$_{max}y_c = \delta_{st}(\alpha/\alpha') r_i \tag{9}$$

衝撃係数は動的倍率の動たわみと静たわみの比であらわされるから

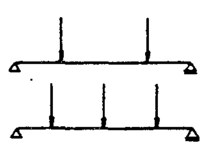
$$i = \frac{_{max}y_c}{y_c} = \frac{\alpha}{\alpha'}\frac{r_i}{\sum a_i} \tag{10}$$

式(9)，(10)より

$$i = \frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\sqrt{-\sum a_i^2 \cdot \ln(1 - P_r)}}{\sum a_i} \tag{11}$$

式(11)中，$\sum a_i$と$\sum a_i^2$は荷重位置における正弦関数であらわされ，荷重間隔（車頭間隔）をH_w，載荷長をℓであらわし各車頭間隔を等間隔にとって$\sum a_i$，$\sum a_i^2$を式であらわすと，

FIG. 1



偶数台載荷の場合（$n = 2, 4, 6$ ……）

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2\sin\frac{\pi}{2\ell}(\ell - H_w) + 2\sin\frac{\pi}{2\ell}(\ell - 3H_w) + \cdots\cdots + 2\sin\frac{\pi}{2\ell}\left\{\ell - (n-1)H_w\right\} \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 2\sin^2\frac{\pi}{2\ell}(\ell - H_w) + 2\sin^2\frac{\pi}{2\ell}(\ell - 3H_w) + \cdots\cdots + 2\sin^2\frac{\pi}{2\ell}\left\{\ell - (n-1)H_w\right\} \tag{13}$$

奇数台載荷の場合（$n = 3, 5, 7$ ……）

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1+2\sin\frac{\pi}{2l}(l-H_w)+2\sin\frac{\pi}{2l}(l-2H_w)+\cdots\cdots+2\sin\frac{\pi}{2l}\left\{l-\frac{m-1}{2}H_w\right\} \tag{14}$$

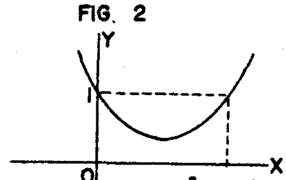
$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 1+2\sin^2\frac{\pi}{2l}(l-H_w)+2\sin^2\frac{\pi}{2l}(l-2H_w)+\cdots\cdots+2\sin^2\frac{\pi}{2l}\left\{l-\frac{m-1}{2}H_w\right\} \tag{15}$$

車頭間隔は文献(2)より平均最小車頭間隔実験式を用いた． 荷重速度をv(Km/h)とすれば車頭間隔は

$$H_w = 0.0022v^2 + 0.14v + 5.7 \qquad \text{単位: m} \tag{16}$$

5. 計算結果と考察

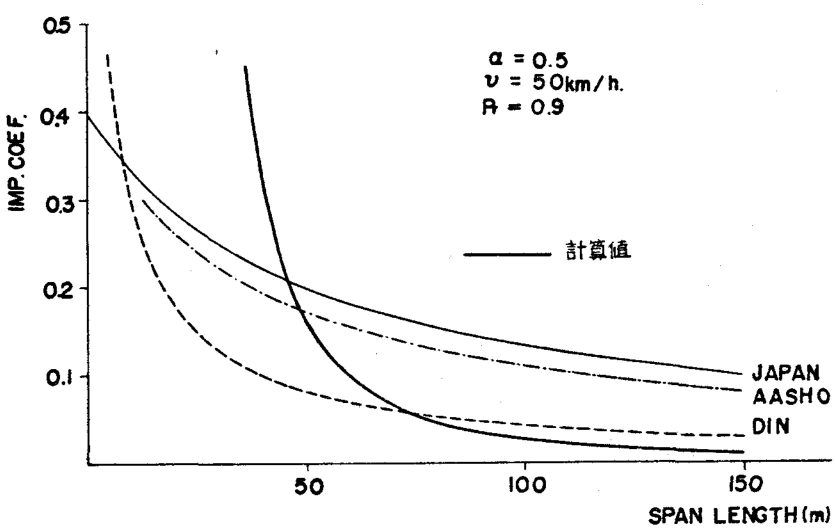
FIG. 2



$Y = 1-2(1-2\beta^2)X+X^2$

式(11)においてαの値は名神高速道路における自動車走行試験の結果から 0.1～0.5であり，減衰定数βは約0.02，ωは2.0～3.0 cpsである。 α^2は$(\omega/p)^2$に関し二次式となり（図-2），$0<(\omega/p)^2<2(1-2\beta^2)$における$\alpha'$の値が$\iota$に最も大きな影響を与える。しかしそれは約6 cps のpの値以上の振動数の場合であってそのような振動数をもつ橋桁はスパン長が20m以下の橋であるので我々が今問題にしているランダムな位相差をもつ荷重の多数載荷，即ち比較的長いスパンの橋には影響はない． 式(11)～(16)によって計算した結果をグラフにあらわしたのが図-3である． 図からも明かなように比較的長スパンでは衝撃係数の逓減率は日本の示方書のものよりかなり小さい値が得られた。以上の計算では車頭間隔を等間隔に速度vの関数で示したがこれとは別に自動車交通流模型を作り式(11)による衝撃係数を算定したがいずれも図-3の結果よりも低い値であった。

FIG. 3 IMPACT COEFFICIENT



参考文献

(1) Lord Rayleigh, Theory of Sound vol. 1

(2) 高速道路調査会, 交通現象に影響を及ぼす諸要因について

(3) 小堀・吉田 電子計算機による自動車荷重列の模型化に関する研究