I－1　トラスの振動

岐阜大学　工学部　正員　○　井上　肇
〃　〃　〃　岡本　尚
東大生産技術研究所　〃　佐藤　暢彦

トラスの振動については、古く Paulhausen, Federhofer 等の研究があるが、計算の行列論的な取扱いと電子計算機によるその演算の遂行とを考えて、こゝで、それの再検討を試みた。

トラスは静的には、それの部材に軸力のみが作用する簡単な構造物であるが、動的には、その部材には軸力の外に、その部材の縦および横振動が発生する複雑なものとなる。しかし、Paulhausen 等は、この複雑さを避けるために、トラスの振動系として、部材の２次的な振動を無視し、軸力の変化のみを考え、さらに各節点に質量が集中している質点系を用いているが、こゝでもそれを用いた。

一般に、トラスの Flexibility matrix を F，Stiffness matrix を $K\ (=F^{-1})$ とし、トラスの荷重ベクトル P，変位ベクトル を Y とすると

$$Y = F \cdot P \qquad \text{あるいは} \qquad P = K \cdot Y \tag{1}$$

と書ける。そこで、トラスへの静荷重 P_s，それによる変位 Y_s，振動による変位 Y_v そして振動中の荷重ベクトル を P_v とすれば、自由振動の運動方程式は、D'Alembert の原理によって

$$P = P_s + P_v = P_s - M\ddot{Y}_v = KY = KY_s + KY_v$$

となる。静荷重のみを受け、トラスが静止しているときは $P_s = KY_s$ であるから、運動方程式は

$$M\ddot{Y}_v + KY_v = 0 \tag{2}$$

と表わされる。こゝで M は各節点で静荷重を考慮に入れた質量からなる対角行列、$\ddot{Y}_v$ は Y_v の各要素の時間についての２階微分を要素とするベクトルである。

こゝで $Y_v = y \cos \omega t$（ω；円振動数）とおけば、（2）は次の振動数方程式となる。

$$\det | M^{-1}K - \omega^2 I | = 0 \tag{3}$$

こゝで I は単位行列である。

この計算において用いている トラスの Flexibility matrix F は、トラスが静的に解かれておれば容易に求められる。すなわち、トラスに静荷重 $P = \{P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n\}$ が働くとき トラスの各部材の部材力 $S = \{S_1, S_2, \cdots\cdots, S_m\}$ は

$$S = B \cdot P \tag{4}$$

として、表わすことができる。こゝで n；節点の数，m；部材の数 である。また、係数行列 B は次のようなものであって、それの各要素 b_{jk} は、荷重 $P_k = 1\ (k = 1, 2, \cdots\cdots n)$ によ

る部材力 S_j で、S_j の影響線の値といってもよい。

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & \cdots & b_{jk} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Pの方向と同じ方向への変位ベクトル V は、仮想仕事の原理を用いて

$$V' = \{ v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n \} = \frac{1}{E}\left[S_1, S_2, \cdots\cdots S_i \cdots\cdots, S_m\right]\cdot\begin{bmatrix} \bar{S}_{11}\frac{l_1}{A_1}, & \bar{S}_{21}\frac{l_1}{A_1}, & \cdots\cdots & \bar{S}_{n1}\frac{l_1}{A_1} \\ \bar{S}_{21}\frac{l_2}{A_2}, & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{S}_{i1}\frac{l_i}{A_i}, & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{S}_{m1}\frac{l_m}{A_m} & \cdots\cdots & & \bar{S}_{mn}\frac{l_m}{A_m} \end{bmatrix}$$

$$= S'\cdot R\cdot B\cdot I = (B\cdot P)'\cdot R\cdot B$$

$$\therefore\ V = (R\,B)'(B\cdot P) = B'\cdot R'\cdot B\cdot P = F_{vv}\cdot P \qquad (6)$$

として求まる。(6)において $R=\frac{1}{E}diag\left(l_1/A_1,\ l_2/A_2,\ \cdots\cdots,\ l_i/A_i,\ \cdots\cdots\ l_m/A_m\right)$

$$F_{vv}= B'\cdot R\cdot B \qquad (\text{ただし}\quad R'=R)$$

こゝで、l_i, A_i は第 i 部材の長さおよび断面積、E は部材の材料の弾性係数である。

強制振動については、質点系の強制振動として取扱えばよいが、こゝでは次のように運動方程式を導いた。Uを振動中の変位ベクトル、$\bar{C}$ を粘性減衰 および $P(t)$を外力ベクトルとすると

$$M\ddot{U} + \bar{C}\dot{U} + KU = \bar{P}(t)$$

こゝで、X, W をそれぞれ、基準座標、それに対応する基準関数とすれば $U=W\cdot X$ であり
W が正規化されておれば、$W'W=I$ であるから、運動方程式は

$$\ddot{X} + 2C\dot{X} + \lambda^2 X = P(t) \qquad (7)$$

となる。こゝで $2C=W'M^{-1}\bar{C}W$, $\lambda^2=diag(\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots\cdots, \omega_n^2)$, $P(t)=W'M^{-1}\bar{P}(t)$ である。
(W' ; W の転置行列)

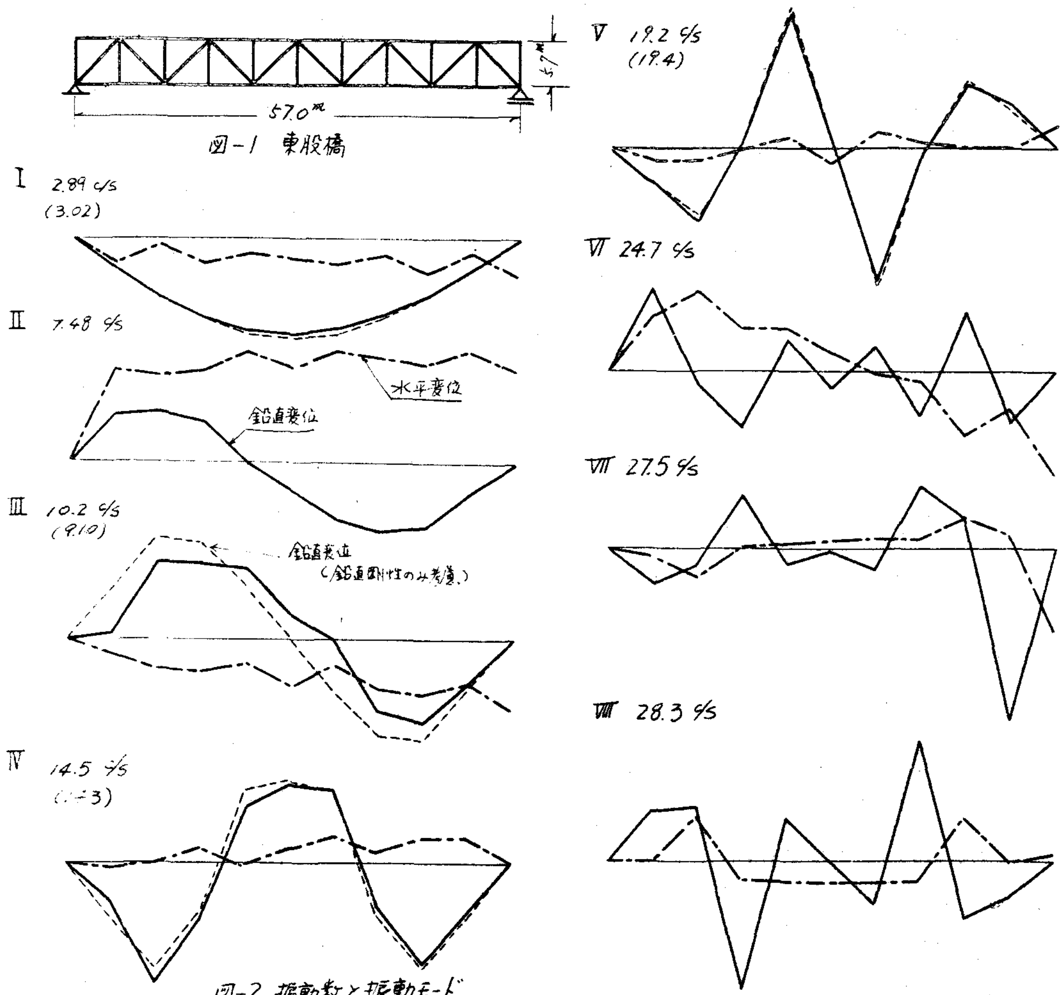
与えられた外力について (7) を積分（通常は数値的に）し、$U=W\cdot X$ によって、強制外力をうけるトラスの応答を計算できる。

この方法の数値計算例は、東股橋（図-1，上路式ワーレントラス）について行なった。固有振動の振動数およびそのモードは図-2に、トラック（ 6^t, $20^{km}/h$ ）による強制振動の解を図-3に

示めす。

図－２において，破線はトラスの鉛直方向の剛性のみを考えた場合であって，その低次の振動においては，全剛性を考えたときに比べて，高い近似を示めしており，また第２次振動は，トラスの水平振巾が大きく，トラスの水平振動であるといえよう。

図－３の破線は，静的に荷重が載荷されたときのトラスの中央点の，実線はトラックの走行時での中央点の鉛直方向の変位である。



図－1 東股橋

図－2 振動数と振動モード
( )内は鉛直剛性のみ考慮したとき

参考文献

1. Fr. Bleich ; Theorie und Berechnung der eisernen Brücken , S. 66～77. 1924

2. E. Federhofer ; Zur Berechnung der niedrigsten Eigenschwingungszahl eines Fachwerkes. Stahlbau , 7. S. 6～8. 1934.

3. 小西，山田 ; 平行弦トラス橋の基本振動数について. 土木学会誌, 37 , P 539～542 . (昭 27)

4. 土木学会 ; 土木技術者のための振動便覧 , P. 44. (昭 41)

5. C. H. Norris and Others ; Structural Design for Dynamic Loads . P. 73～111. 1959

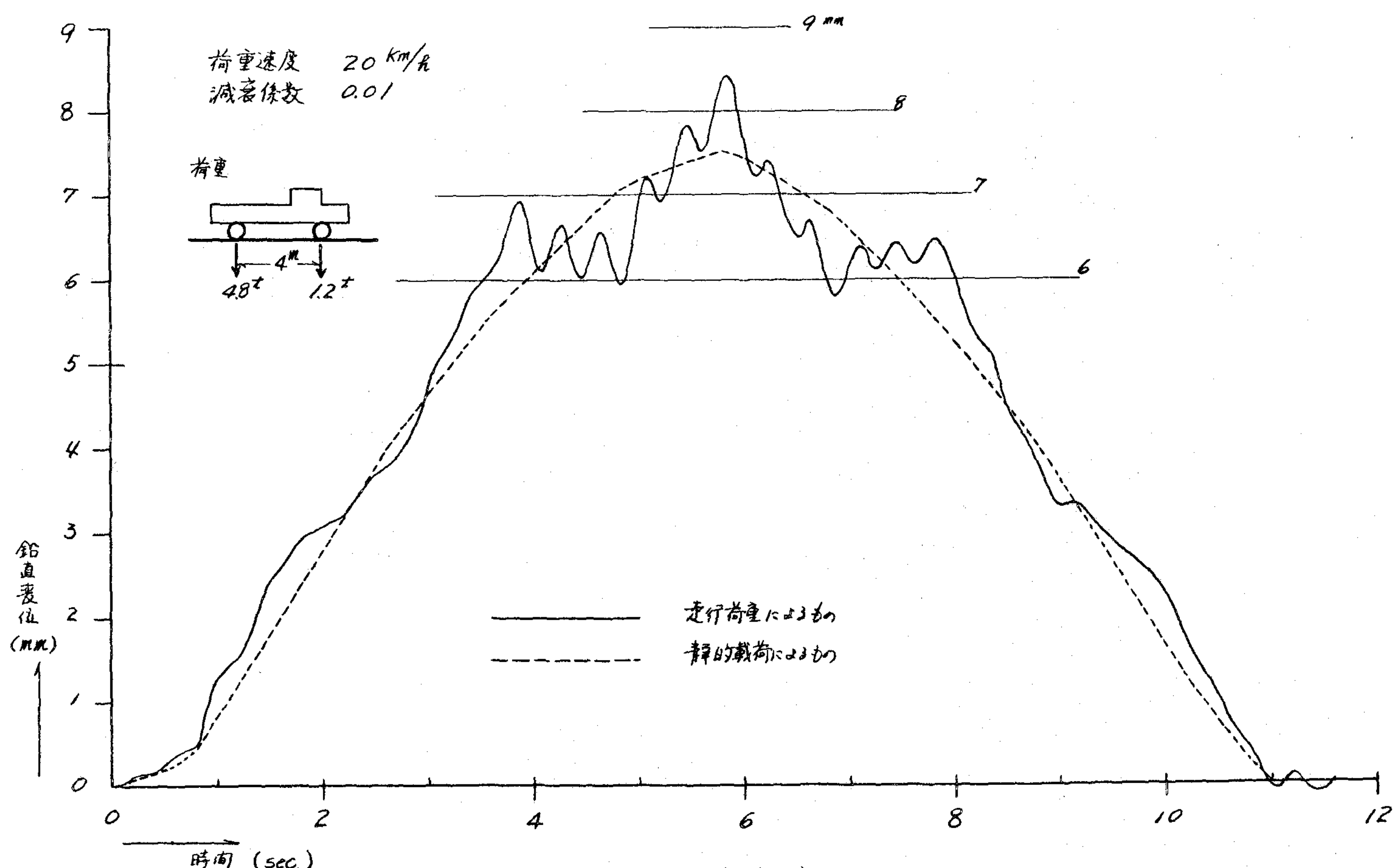


図-3　走行荷重によるトラス中央節点の鉛直変位