不等流計算における差分について

名古屋大学工学部　足立昭平
○伊藤紘慶

開水路不等流の計算法には、逐次計算法、Escoffier あるいはEzraの図式解法などがある。しかし、これらの計算法はいずれも基礎方程式を階差方程式におき代えて計算を進めるものであるから、差分の選び方が不適当な場合には、誤つた結果を導くおそれがある。この報告は、こうした差分の適正な大きさを見出すために、基礎となる階差方程式の精度を検討したものである。

用水路不等流の基礎方程式は、よく知られているように、慣用の文字を用いて、次のように表わされる。

$$dE/dx = \sin\theta\,(1 - f) \tag{1}$$

ここに、

$$E = h\cos\theta + (\alpha Q^2/2gA^2) \tag{2}$$

$$f = n^2 Q^2/R^{4/3} A^2 \sin\theta \tag{3}$$

式(1)をNewton の内挿式展開によつて差分表示すれば、

$$\triangle E = \left\{(1-f) - \frac{1}{2}\triangle f + \frac{1}{12}\frac{d^2 f}{dx^2}\triangle x^2 + \quad\right\}\triangle X\sin\theta \tag{4}$$

となり、通常用いられている諸計算法は上式右辺｛ ｝内の$\triangle X^2$以項の項を省略したものである。したがつて、それらの計算法に採用される差分$\triangle X$はこの省略を満足するものでなければならない。

これらの省略項の大きさを検討するに当つて、考察の便宜および表式の普遍化を図るために、諸量を無次元化しておこう。まず、水路断面形について

$$A = bh^r \text{ および } R = h/r \tag{5}$$

とおいて、限界水深h_cを特性長にとつて、X、h、bに対する無次元量ξ、η、ρを次のように定義する。

$$\xi = X\sin\theta/hc,\quad \eta = h/hc,\quad \rho = b/hc \tag{6}$$

ここに、

$$hc = (r\alpha Q^2/gb^2\cos\theta)^{1/(2r+1)} \tag{7}$$

である。また、等流水深hnが

$$hn = (r^{4/3} n^2 Q^2 / b^2 \sin\theta)^{1/(2r+\frac{4}{3})} \qquad (8)$$

であることから、式(3)の f は、 $\eta n = hn/hc$ とおいて、

$$f = (\eta n / \eta)^{2r+\frac{4}{3}} \qquad (9)$$

となる。そして、問題の式(4)は

$$\triangle\left(\eta + \frac{1}{2r\,\eta^{2r}}\right) = \frac{\triangle\xi}{\cos\theta}\left\{(1-f) - \frac{1}{2}\triangle f + \frac{1}{12}\ddot{f}\ 4\ \xi^2 + \quad\right\} \qquad (10)$$

と表わされ、右辺{ }内において、まず、才３項の絶対値の大きさが問題の集点となる。

さて、式(9)を ξ で微分して、

$$\dot{f} = -\left(2r+\frac{4}{3}\right) f\left(\frac{\dot{\eta}}{\eta}\right),\quad \ddot{f} = \left(2r+\frac{4}{3}\right) f\left\{\left(2r+\frac{7}{3}\right)\left(\frac{\eta}{\eta}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\eta}\right)\right\}$$

$$(11)$$

が導かれるから、次は $(\dot{\eta}/\eta)$ を見出せばよい。一方基礎式(1)が

$$\frac{dh}{dX} = \left\{\sin\theta\,(1-f) + \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dX}\right\} \Big/ \left\{\cos\theta - \frac{\alpha Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h}\right. \qquad (12)$$

と変形できることに着目すれば、上式からただちに、

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \frac{f}{\cos\theta}\cdot\frac{\eta^{2r}}{\eta^{2r+1}-1} + \frac{1}{r}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)\frac{1}{{}^{2r+1}-1} \qquad (13)$$

$$\frac{\ddot{\eta}}{\eta} = \left(\frac{\dot{\eta}}{\eta}\right)^2 - \left\{1 - 2r\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\frac{4}{3}\frac{f}{\cos\theta}\right\}\frac{\eta^{2r}}{\eta^{2r+1}-1}\left(\frac{\dot{\eta}}{\eta}\right) + \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\ddot{\rho}}{\rho}\right) - \right.$$

$$\left.\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2\right\}\frac{1}{\eta^{2r+1}-1} \qquad (14)$$

が得られ、問題の才三項の微係数 $\ddot{f}$ は式(11)、(13)、および、(14)によって計算できることになる。この一般式は、紙面の都合上省略するが、水路の基本形として、$\cos\theta = 1$ で、かつ、　　$\cos st$ の場合について導いた結果は

$$\ddot{f} = \left(2r+\frac{4}{3}\right)\left(\frac{\eta^{2r}}{\eta^{2r+1}-1}\right)^2 (2rf+1)\, f^2 \qquad (15)$$

となる。この場合の $\dot{f}$ は

$$\dot{f} = -\left(2r+\frac{4}{3}\right)\frac{\eta^{2r}}{\eta^{2r+1}-1}f^2 \tag{16}$$

で与えられるから、いま、かりに、問題の才３項が才２項の１／10の程度の大きさであればよいとすれば、この場合に採るべき差分$\Delta\xi$は

$$|\Delta\xi| < 0.6\,1\,\frac{\eta^{2r+1}}{\eta^{2r}(2rf+1)}\,1 \tag{17}$$

でなければならない。

この式（17）の結果は、

$\eta \to 1$、すなわち、hがh_cに近ずくほど、

$f \to \infty$、すなわち、hがh_nに対して小さいほど、

差分$\Delta\xi$を小さく採らなければならぬことをあらわしている。したがつて、水路勾配が大きく、上記のような条件$\eta \to 1$、あるいは、$f \to \infty$に近ずく可能性をもつ山地河川においては、とくに差分の選定に注意することが必要である。