山地河川の砂礫粒度組成に関する考察

名古屋大学　足　立　昭　平

移動床水路の粗度はその地点を通過する流水および流砂によつて形成されるものであるから、それぞれの地点における流水および流砂の特性に相対応した形態を示すはずである。河床材料の粒度が大きい山地河川では河床面上の砂礫粒度が流水抵抗の主要な役割りを受けもつと考えられるから、それらの粒度組成を吟味することによつて上流から下流への砂礫輸送の推移を究明する手掛りが得られるであろう。こうした意図のもとに筆者らは二、三の実河川の河床砂礫粒度の調査を進めているが、ここではさきに第19回土木学会年次学術講演会に発表した砂礫粒度組成の確率論的考察を一般化した形で纒めてみたい。

河床面上の一測線における砂礫の粒度組成が、粒径 t_i の砂礫が n_i 個（$i = 1, 2, \cdots\cdots m$）であるとすれば、その測線上における流水抵抗あるいは流砂輸送に関する諸条件式の構成因子の中に（x_i, n_i）が含まれるはずである。それらの諸式の関数形は、相手粗度の大きい粗面上の流れの機構あるいは個々の砂礫粒子のうけもつ流水抵抗もしくは力学的平衡条件から洞察されるものであるが、これらを一般的に

$$F_0(x_i, n_i) = \nu_0 \qquad F_1(x_i, n_i) = \nu_1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad F_k(x_i, n_i) = \nu_k$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots m) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

と書きあらわしておこう。ここに ν_0 , ν_1 , $\cdots\cdots$ ν_k はその地点における水理量で与えられる量であつて、その地点の特性値と考えてよい。(1)式で規定される粒度組成がただ一通りであるという保証はないから、それらの中でもつとも確からしい組はどのようなものであるかを考えることにする。ある一組の粒度組成（n_i）について個々の砂礫が並ぶ配列の組合せの数は

$$f = \frac{(\sum n_i)!}{n_1!\, n_2! \cdots\cdots n_m!} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

である。このような配列の仕方の数 f が最大であるような組があるとすればそれは

$$df = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial n_i} dn_i \right) = 0$$

あるいは対数をとつて

$$d(\ln f) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial n_i} \, dn_i \right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

を満足するはずである。(3)式を展開すれば

$$d(\ln f) = \sum_{i=1}^{m} \ln \frac{\sum n_i \exp(1/2\sum n_i)}{n_i \exp(1/2 n_i)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

となる。一方この砂礫粒度組成は(1)式で束縛されるから

$$dF_0 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F_0}{\partial n_i} \, dn_i \right) = 0 \;, \; dF_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial n_i} \, dn_i \right) = 0 , \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots , \quad dF_k = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F_k}{\partial n_i} \, dn_i \right) = 0 \cdots (5)$$

でなければならない。

したがつて、fが最大でかつ(1)式の条件に適うものは

$$d(\ln f) + \alpha_0 \, dF_0 + \alpha_1 \, dF_1 + \cdots\cdots\cdots + \alpha_k \, dF_k = 0 \quad \cdots (6)$$

を満足するものでなければならない。ここに　$\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots \alpha_h$　は未定常数である。(4)および(5)式を(6)式に代入すれば

$$\frac{n_i}{\sum n_i} = \exp\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sum n_i} - \frac{1}{n_i} \right) + \alpha_0 \frac{\partial F_0}{\partial n_i} + \alpha_1 \frac{\partial F_1}{\partial n_i} + \cdots + \alpha_k \frac{\partial F_k}{\partial n_i} \right\}$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, m) \quad \cdots\cdots (7)$$

が得られる。結局m個の(7)式および（ k＋1 ）個の(1)式から、粒度別数 n_1 , n_2 ………n_m および未定常数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots \alpha_k$ の合計（ m＋k＋1 ）個が x_i および ν_0 , ν_1 ………, ν_k の関数として決定されることになる。

(1)式に束縛される粒度組成（ n_i ）について個々の砂礫のすべての配列の状態が同じ確率で現われるとすれば、このようにして求められる組がもつとも高い確率で現われ、それがもつとも確からしい粒度組成であるということができよう。

砂礫の配列の状態が同じ確率で現われるという考え方には、(1)式の束縛条件が前提になつているわけであるから、問題はFの関数形および流水と流砂の特性に関する特性値 ν がどのように表わされるかである。

さきの第19回土木学会年次講演会に述べたものは、一つの方法論として

これらの関数形Ｆを

$$\sum n_i x_i^j / \nu_j$$

を仮定したものであつて、ｊ＝２のみを考慮する場合に粒度分布が正規分布をとることを示した。ここにＬは測線長である。

(8)式の妥当性について、実地資料からの検証と、粗度に関する実験の両面から検討中であるが、こうした考察の基礎的考え方について一つの試案を提起した次第である。