

テーパーの著しくついているアーチに関する力学的研究

(応力変形の解析)

名古屋工業大学 松 浦 聖

まえがき

例えばいわゆるバスケット・ハンドル橋に関する、基本的な考察として、の、テーパーの著しく、ついているアーチに関する力学的研究に関連して、ここでは等分布荷重（材軸に沿って一定）がアーチの面内中心方向に満載される場合と、鉛直方向に満載される場合とに対して、円弧アーチに生ずる応力変形を計算したものである。なおアーチ断面としては円形パイプ構造を考えることにした。

計算は2つの主構アーチが一体となつている、その中央のところでの内力を不静定力（ m 、 T ）（図-5参照）として考え、アーチ主構面内に関する変形と、その面に垂直方向の変形（ネジレを伴う）とを、それぞれ変位で表わした釣合いの式を解いて求め、かつスパン中央でのいわゆる相対変位は無いことに注目して、所要アーチの応力変形を見いだした。

1. アーチと座標のとり方

計算の対象としたアーチは、図-1、図-2のように2本のアーチは中央で一体となつており、かつ傾斜角 ϕ なるテーパーがついている。

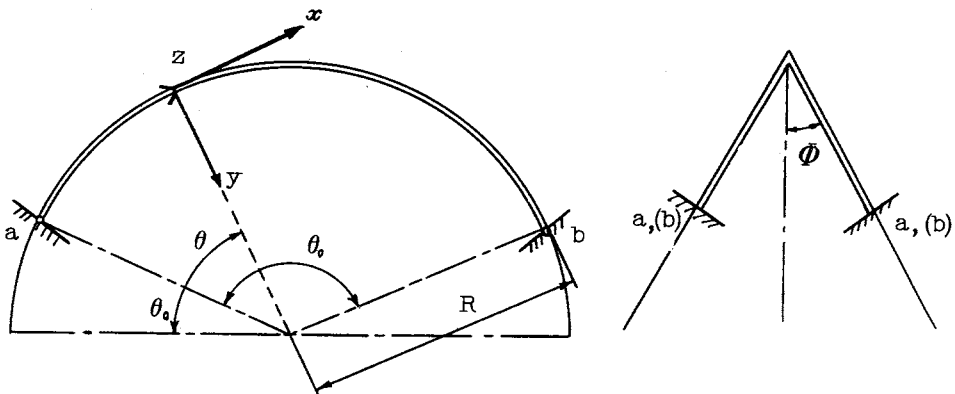


図 - 1

支点としては、一応 a 、 b 、 $\bar{a}$ 、 $\bar{b}$ 、点でのアーチ面内の廻転のみが自由の場合を考えておく。座標の中心はアーチ部材断面に座標系を固定し、その原点は剪断中心、この場合断面の中心にとる。 x 軸は橋軸接線方向に、 y 軸はアーチ曲率中心方向に z 軸は xy 面に垂直方向に、図-1のごとく正を定めることにする。

2. 変位の符号（正）および断面力の符号の定義

（図-3、図-4、を参照）

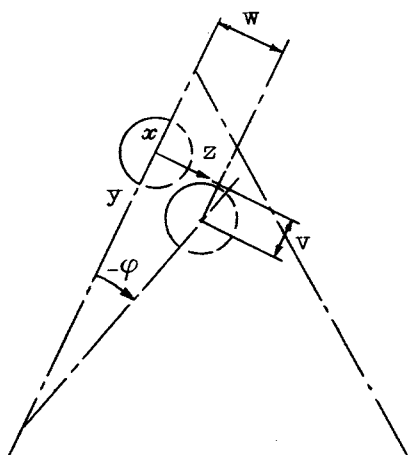


図-3

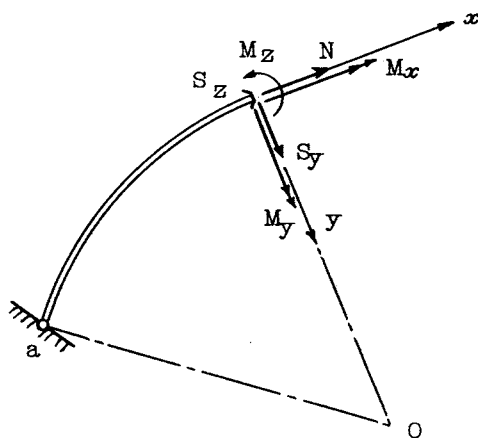


図-4

u 、 v 、 w はそれぞれ、 x 方向、 y 方向、 z 方向の変位で、その符号は座標の正の方向と一致して考える。 φ はネジリ廻転でネジリモーメント（図-4参照）の正の方向と同じにとる。

3. 応力歪関係式

$$(3.1) \quad M_x = G J T \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dw}{ds} \right)$$

$$(3.2) \quad M_y = -E I_y \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{\varphi}{R} \right)$$

$$(3.3) \quad M_z = -E I_z \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right)$$

$$(3.4) \quad N = E A \left(\frac{du}{ds} - \frac{v}{R} \right)$$

ここで GJT はアーチの x 軸まわりのネジリ剛性、 EI_y はアーチの y 軸まわりの曲げ剛性、 EI_z はアーチの z 軸まわりの曲げ剛性で、 A はアーチの横断面積である。

4. アーチの中央の剛節構造に関する考慮

以下の計算では一応構造物および負載される荷重の対称性より、 T 、 m を考えておけば充分である。

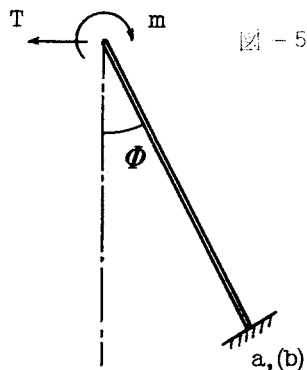


図 - 5

5. アーチに鉛直方向に分布荷重（橋軸に沿つて烈度 p ）が負載される場合の応力・変形

(1) 釣合条件；—

$$(5.1.1) \quad S_{\theta} = \frac{dN}{d\theta} - R \cdot P \cos \phi \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta - \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right)$$

$$(5.1.2) \quad \frac{dM}{d\theta} + N = -R \cdot P \cos \phi \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \right)$$

$$(5.1.3) \quad \frac{dQ}{d\theta} = -P \sin \phi R$$

$$(5.1.4) \quad S_{\theta} = \frac{1}{R} \frac{dM_2}{d\theta}$$

$$(5.1.5) \quad M_{\theta} = \frac{dM_1}{d\theta}$$

$$(5.1.6) \quad S = \frac{1}{R} \frac{dM_1}{d\theta} + \frac{M_2}{R}$$

(2) アーチの面内変形に対する弾性曲線方程式の解；—

(5.1.1)，(5.1.2)，(5.1.4) 式と (3.3)，(3.4) 式を考慮すれば次式 (5.2.1)，(5.2.) を得る。

$$(5.2.1) \quad \frac{EA}{R} \left(\frac{d^2 u}{d\Theta^2} - \frac{dv}{d\Theta} \right) + \frac{EI_z}{R^3} \left(\frac{d^2 v}{d\Theta^2} + \frac{du}{d\Theta} \right) \\ = +R P \cos \Phi \left(\sin \frac{\Theta_0}{2} \cos \Theta - \cos \frac{\Theta_0}{2} \sin \Theta \right)$$

$$(5.2.2) \quad -\frac{EI_z}{R^3} \left(\frac{d^2 v}{d\Theta^2} + \frac{du}{d\Theta} \right) + \frac{EA}{R} \left(\frac{du}{d\Theta} - v \right) \\ = -R P \cos \Phi \left(\cos \frac{\Theta_0}{2} \cos \Theta + \sin \frac{\Theta_0}{2} \sin \Theta \right)$$

ここで $\frac{EA}{R} \equiv F_1$, $\frac{EI_z}{R^3} \equiv F_2$ とおけば、結局変位 u , v は次式 (5.2.3), (5.2.4) のように求められる。

$$(5.2.3) \quad u = +\frac{F_1}{F_1^2} \left\{ -2C_2 \cos \theta - 2C_4 \sin \theta + \frac{1}{4} \times \right. \\ \left. (-f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) + \frac{\theta}{2} (f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \right\} \\ + c_1 \sin \theta + C_2 (\cos \theta + \theta \sin \theta) - C_3 \cos \theta + C_4 (\sin \theta - \theta \cos \theta) \\ + C_5 \theta + C_6 - \frac{f_1}{8} \{ 2\theta \sin \theta - (\theta^2 - 1) \cos \theta \} - \frac{f_2}{8} \{ 2\theta \cos \theta + \\ (\theta^2 - 2) \sin \theta \}$$

$$(5.2.4) \quad v = (c_1 + c_2 \theta) \cos \theta + (C_3 + C_6 \theta) \sin \theta + C_5 - \frac{\theta^2}{8} (f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta)$$

$$\text{ここで } f_1 \equiv +\frac{2RP \cos \Phi}{F_2} \sin \frac{\theta_0}{2} \quad f_2 \equiv +\frac{2RP \cos \Phi}{F_2} \cos \frac{\theta_0}{2} \text{ で}$$

$C_1, C_2, \dots, C_6$ は積分常数

(3) 積分常数の決定；――

境界条件としては、次の6つを考えておくこととする。

$$(5.3.1) \quad (v)_{\Theta=0} = 0, \quad (5.3.2) \quad (M_Z)_{\Theta=0} = 0$$

$$(5.3.3) \quad \left(\frac{dv}{d\Theta} \right)_{\Theta=\frac{\Theta_0}{2}} = 0 \quad (5.3.4) \quad (u)_{\Theta=0} = 0$$

$$(5.3.5) \quad (u)_{\Theta=\frac{\Theta_0}{2}} = 0 \quad (5.3.6) \quad V + (N)_{\Theta=0} \frac{\cos \bar{\Theta}_0 - (S)_{\Theta=0}}{\sin \bar{\Theta}_0} \times$$

V はアーチの面内鉛直反力、以上の境界条件より、いま $\theta_0 = 100^\circ$, $\Phi = 15^\circ$ の場合を考えてみると、積分常数は次のようになる。

$$C_1 = -C_5 = \frac{1.5879 \quad 165F_1 + 8.2194 \quad 33F_2}{\alpha} R p -$$

$$- \frac{0.2054 \quad 1854F_1 + 0.4507 \quad 580F_2}{\alpha} T$$

$$C = - \frac{0.5299 \quad 830F_1 + 1.3817 \quad 91F_2}{\alpha} R q$$

$$+ \frac{0.0333 \quad 9193F_1 - 0.4833 \quad 267F_2}{\alpha} T$$

$$C_3 = + \frac{0.5285 \quad 841F_1 + 3.7602 \quad 50F_2}{\alpha} R p$$

$$- \frac{0.0314 \quad 377F_1 + 0.0912 \quad 495F_2}{\alpha} T$$

$$C_4 = + \frac{0.9312 \quad 145F_1 + 5.2691 \quad 77F_2}{\alpha} R p$$

$$- \frac{0.1027 \quad 0927F_1 + 0.2253 \quad 790F_2}{\alpha} T$$

$$C_6 = + \frac{1.3857 \quad 183F_1^2 + 7.172808F_1F_2 + 3.7602 \quad 50F_2^2}{F_1 \alpha} R p$$

$$+ \frac{-0.0648 \quad 296F_1^2 + 0.4588 \quad 611F_1F_2 - 0.9666 \quad 534F_2^2}{F_1 \alpha} T$$

$$\alpha ; F_2 (0.8842 \quad 618F_1 + 7.4697 \quad 26F_2)$$

(4) アーチの面内変形に対する弾性曲線の方程式の解；——

(5.1.3) , (5.1.5) , (5.1.6) 式と (3.1) , (3.2) を考慮して次の
(5.4.1) , (5.4.2) を得る。

$$(5.4.1) \quad \frac{GJ_T}{R} \frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2} + \frac{GJ_T}{R^2} \frac{dw}{d\varphi^2} + \frac{EI_T}{R^2} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{EI_T}{R} \varphi = 0$$

$$(5.4.2) \quad -\frac{EI_T}{R^2} \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{EI_T}{R} \frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2} + \frac{GJ_T}{R} \frac{d^2 \varphi}{d\varphi^2} + \frac{GJ_T}{R^2} \frac{dw}{d\varphi^2} = P \sin \varphi R^2$$

ここで $\frac{GJ_T}{R} \equiv F_3$, $\frac{EI_T}{R} \equiv F_4$ とおけば、結局 w , φ は

次式 (5.4.3)、(5.4.4) のように求められる。

$$(5.4.3) \quad w = -C_3 R \cos \phi + C_4 R \left(-\phi \cos \phi + \frac{2F_4}{F_3 + F_4} \sin \phi \right)$$

$$-C_3 R \sin \phi - C_4 R \left\{ \phi \sin \phi + \frac{2F_4}{F_3 + F_4} \cos \phi \right\}$$

$$- \frac{\sin \phi R^3 p}{2F_3} \phi^2 + C_5' \phi + C_6'$$

$$(5.4.4) \quad \phi = (C_1' + C_2' \phi) \cos \phi + (C_3' + C_4' \phi) \sin \phi$$

$$- \frac{F_3 + F_4}{F_3 F_4} \sin \phi R^3 p$$

ここで $C_1, C_2, \dots, C_6$ は積分常数

(5) 積分常数の決定

境界条件としては、次の6つを考えておくこととする。

$$(5.5.1) \quad (u)_{\phi=0} = 0 \quad (5.5.2) \quad (\phi)_{\phi=0} = 0$$

$$(5.5.3) \quad \left(\frac{dw}{d\phi} \right)_{\phi=0} = 0 \quad (5.5.4) \quad \left(\frac{d\phi}{d\phi} \right)_{\phi=0} = 0$$

$$(5.5.5) \quad (S_z)_{\phi=0} = \frac{1}{2} T \cos \phi + \int_0^\phi p \sin \phi R d\phi$$

$$(5.5.6) \quad (M_z)_{\phi=0} \cos \phi + (M_x)_{\phi=0} \sin \phi = \frac{m}{2} - \frac{T \cos \phi}{2} R \times$$

$$(1 - \sin \phi) - \int_0^\phi (p \sin \phi) \{ R \sin (\phi + \phi) - R \sin \phi \} R d\phi$$

以上の境界条件より、いま $\theta_0 = 100^\circ$ 、 $\phi = 15^\circ$ の場合を考えてみると、積分常数は次のようになる。

$$C_1' = +0.258819 \frac{F_3 + F_4}{F_3 F_4} R^2 p$$

$$C_2' = + \frac{0.772035 F_3^2 + 0.652706 F_3 F_4 - 0.119328 F_4^2}{\beta} m$$

$$- \frac{0.745728 F_3 + 0.938022 F_3 F_4 + 0.1922936 F_4^2}{\beta} R T$$

$$- \frac{0.353456 F_3 + 0.448093 F_3 F_4 + 0.0946365 F_4^2}{\beta} R^2 p$$

$$\begin{aligned}
C_3' &= + \frac{-0.772035F + 0.119329FF + 0.7720 \quad 34FF - 0.1193 \quad 28F}{\beta (F_3 + F_4)} m \\
&+ \frac{0.7457 \quad 28F + 1.7265 \quad 56F + 1.2159 \quad 27FF + 0.2350 \quad 99F}{\beta (F + F)} R T \\
&+ \frac{0.3534 \quad 56F + 0.8121 \quad 49FF + 0.5639FF + 0.1052 \quad 378F}{\beta (F + F)} R^2 P \\
C_4' &= + \frac{0.3889 \quad 31 (F + F)}{\beta} m - \frac{(0.3756 \quad 78F + 0.117607F) (F + F)}{\beta} R T \\
&+ \frac{(0.2965 \quad 35F + 0.0794 \quad 096F) (F_3 + F_4)}{\beta} R^2 P \\
C_5' &= + 0.4829 \quad 63 \frac{R^2}{F_3} T + 0.2258 \quad 62 \frac{R^3}{F_3} P \\
C_6' &= + \frac{0.7778 \quad 62 (F + F) F}{\beta} R m - \frac{(0.7513 \quad 56F + 0.2352 \quad 14F) F}{\beta} R T \\
&+ \frac{0.8222 \quad 08F + 1.6444 \quad 17FF + 0.3878 \quad 58F}{\beta} R p
\end{aligned}$$

$$\beta ; \quad F_3 \quad F_4 (3.17677F_3 + 0.88494F_4)$$

(6) 断面力の計算結果

$$(5.6.1) \quad S = -F_2 \left\{ -2C_2 \cos \theta - 2C_4 \sin \theta - \frac{3}{4} (f_1 \sin \theta - f_2 \sin \theta) + \frac{\theta}{2} (f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \right\}$$

$$\begin{aligned}
(5.6.2) \quad N &= +F_2 \left\{ +2C_2 \sin \theta - 2C_4 \cos \theta + \frac{3}{4} (f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta}{2} (f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.6.3) \quad M_Z &= -RF_2 \left\{ -2C_2 \sin \theta + 2C_4 \cos \theta + C_5 - \frac{1}{4} \times \right. \\
&\quad \left. (f_1 \sin \theta + f_2 \cos \theta) - \frac{\theta}{2} (f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta) \right\}
\end{aligned}$$

$$(5.6.4) \quad M_x = + \frac{2F_3 F_4}{F_3 + F_4} (C'_2 \cos \theta + C'_4 \sin \theta) - 0.2588 \cdot 190 R^2 p \theta + \frac{F}{R^3} C'_5$$

$$(5.6.5) \quad M_y = + \frac{2F_3 F_4}{F_3 + F_4} (-C'_2 \sin \theta + C'_4 \cos \theta) - 0.2588 \cdot 190 R^2 p$$

$$(5.6.6) \quad S_z = -0.2588 \cdot 190 R p \theta + \frac{F}{R^2} C'_5$$

(7) 不静定力 m , T の決定

m , T は次の2つの条件から決定できる。

$$(5.7.1) \quad (\varphi)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$(5.7.2) \quad (w)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (\tan \Phi) (V)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

いま $R = 50 \text{ m}$ 、外径 1 m 、厚さ 3 cm のパイプアーチ構造を考えると

$$m = +5715 \cdot P \text{ Kg-cm}, \quad T = -1139.47 P \text{ Kg} \text{ となる。}$$

6. アーチの中心方向に分布荷重（橋軸に沿つて烈度 p ）が負載される場合の応力・変形

5.のような計算をした結果を列挙すると次のようになる。

$$(6.1) \quad u = -\frac{R^2}{EA} P \cdot \theta + \frac{2 I_z}{A R^2} (-C_2 \cos \theta - C_4 \sin \theta) + C_5 \sin \theta +$$

$$C_2 (\cos \theta + \theta \sin \theta) - C_3 \cos \theta + C_4 (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

$$+ C_5 \theta + C_6$$

$$(6.2) \quad v = (C_1 + C_2 \theta) \cos \theta + (C_3 + C_4 \theta) \sin \theta + C_5$$

$$(6.3) \quad w = -C'_1 R \cos \theta + C'_2 R (-\theta \cos \theta + \frac{2F_4}{F_3 + F_4} \sin \theta)$$

$$-C'_3 R \cos \theta - C'_4 R (\theta \sin \theta + \frac{2F_4}{F_3 + F_4} \cos \theta) + C'_5 \theta + C'_6$$

$$(6.4) \quad \varphi = (C + C \theta) \cos \theta + (C + C \theta) \sin \theta$$

$$\text{したがって} \quad C_1 = -6.1856 \frac{R}{P} p - 0.2323 \cdot 0.5 \frac{1}{P^2} T$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= +3.68590 \frac{R}{F_1} p + 0.0377616 \frac{1}{F_2} T \\
C_3 &= -0.839454 \frac{R}{F_1} p - 0.0355525 \frac{1}{F_2} T \\
C_4 &= -3.09284 \frac{R}{F_1} p - 0.116153 \frac{1}{F_2} T \\
C_5 &= +6.18567 \frac{R}{F_1} p + 0.232305 \frac{1}{F_2} T \\
C_6 &= -4.525354 \frac{R}{F_1} p - 0.0733138 \frac{1}{F_2} T \\
C'_1 &= 0 \quad C'_2 = + \frac{0.772035F_3^2 + 0.652707F_3F_4 - 0.119328F_4^2}{\beta} m \\
&\quad - \frac{0.745728F_3^2 + 0.938022F_3F_4 + 0.1922936F_4^2}{\beta} RT \\
C'_3 &= + \frac{-0.772035F_3^2 + 0.119328F_3F_4 + 0.772035F_3F_4^2 - 0.119328F_4^3}{\beta (F_3 + F_4)} \\
&\quad m + \frac{0.745728F_3^2 + 1.726556F_3F_4 + 1.215927F_3F_4^2 + 0.235099F_4^3}{\beta (F_3 + F_4)} RT \\
C'_4 &= + \frac{0.388931(F_3 + F_4)^2}{\beta} m \\
&\quad - \frac{(0.375678F_3 + 0.117607F_4)(F_3 + F_4)}{\beta} RT \\
C'_5 &= +0.4829629 \frac{R^2}{F_3} T \\
C'_6 &= + \frac{0.777862F_4(F_3 + F_4)}{\beta} Rm \\
&\quad - \frac{(0.751356F_3 + 0.235214F_4)F_4}{\beta} R^2 T \\
m &= +1956.534 \text{ PKg-cm} \quad T = +3.69545 \text{ PKg}
\end{aligned}$$

応力関係は省略する。

7. あとがき

支点が固定支承でも、また水平横荷重が負載される場合でも、殆んど同じような考え方で応力・変形は計算できるが、これはまた別の機会に述べることにする。

さいごにこの研究に対し、御指導、御助言をいただいた、東大奥村教授、名工大荒井・岡林教授に深甚なる謝意を表する次第である。

参 考 文 献

岡本舜三、「軸線を含む面に垂直なる荷重を受ける

円形曲り梁の研究」 土木学会誌 29巻3号

倉西 茂；「水平横荷重を受けるアーチ橋について」

土木学会論文集 73号

深沢泰晴；「軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する

研究」土木学会論文集 96号