

撓角法による曲線梁ラーメンの解法

岐阜大学工学部 井上 肇

1. まえがき

最近道路の線形および円形、曲線橋が架設されるようになった。この型式の解析についてはいくつかの報文がみられるが、ここではもっと単純な形として、梁が棒あるいはそれに近いものとして考え、その撓角法的な解析を言式みた。

構造的な曲線ケタはその支点で橋台(舷P)に剛結されている限り、固定とはならない。自然ラメンあるいは連続ケタ形式がとれる。(1) によってこの問題は立体構造物としてラメンと解くこととなり、その変形法による解析を進めゆく方が、応力法よりもその表式が簡潔で、取り扱いが便利であると考え、曲線ケタ(構造面内及び面外)変形するアーチ)についての撓角式を導き、よく知られている直棒の撓角式と合せ考え、鉛直荷重の場合について、その構造と解こうとするものである。

2. 曲線ケタの撓角式(面内アーチ)

(1) アーチの面内変形(荷重なし) (図-1)

$$\Sigma X_i = \Pi_i \cdot X_i \quad (1)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= \{X_1, X_1', X_2, X_2', X_5, X_5'\} \quad \dots \text{ 枝端力} \\ X_i &= \{x_1, x_1', x_2, x_2', x_5, x_5'\} \quad \dots \text{ 枝端変位} \end{aligned} \quad (2)$$

Π_i : 係数行列

(2) アーチの面外変形 (図-2)

i. 荷重は L

$$X_2 = \Pi_2 \cdot X_1 \quad (3)$$

$\therefore C''$

$$X_2 = \{X_3, X_3', X_4, X_4', X_6, X_6'\} \quad \text{--- 枝端力} \quad (4)$$

$$X_1 = \{x_3, x_3', x_4, x_4', x_6, x_6'\} \quad \text{--- 枝端変位}$$

Π_2 : 係数行列

ii 荷重項¹⁾ ——— 荷重による支反力 ——— (支反変位は L)

$$\overline{X_4}; M_{AB} = \frac{1}{C_1^2 - C_2^2} (C_1 D_1 - C_2 D_2) \quad (5)$$

$$\overline{X_4}'; M_{BA} = \frac{1}{C_1^2 - C_2^2} (C_2 D_1 - C_1 D_2) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \overline{X_6}; T_{AB} = & \frac{1}{2\alpha} \left[(1 - 2\alpha \cot 2\alpha) M_{AB} + \left(\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} - 1 \right) M_{BA} \right. \\ & \left. - r^2 \int_0^{2\alpha} Z \left\{ 2\alpha - \theta - \frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} \sin(2\alpha - \theta) \right\} d\theta \right] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{X_6}'; T_{BA} = & \frac{1}{2\alpha} \left\{ \left(\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} - 1 \right) M_{AB} + (1 - 2\alpha \cot 2\alpha) M_{BA} \right. \\ & \left. + r^2 \int_0^{2\alpha} Z \left\{ -\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} \sin \theta - \theta \right\} d\theta \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

$$\overline{X_3}; S_{AB} = -\frac{1}{2\alpha r} \left\{ M_{BA} - M_{AB} + r^2 \int_0^{2\alpha} Z (2\alpha - \theta) d\theta \right\} \quad (9)$$

$$\overline{X_3}'; S_{BA} = \frac{1}{2\alpha r} \left\{ M_{BA} - M_{AB} - r^2 \int_0^{2\alpha} Z \theta d\theta \right\} \quad (10)$$

$\therefore C''$

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{EI_x} + \frac{r^2}{GK} \right) \left\{ \left(\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} - \cos 2\alpha \right) - p \left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \cos 2\alpha \right) \right\} \quad (11)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{EI_x} + \frac{r^2}{GK} \right) \left\{ (1 - 2\alpha \cot 2\alpha) p \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \right\} \quad (12)$$

$$D_1 = \frac{r^2}{2} \left(\frac{r^2}{EI_x} + \frac{r^2}{GK} \right) \int_0^{2\alpha} \left[\theta \cos(2\alpha - \theta) - \frac{2\alpha}{\sin 2\alpha} \sin \theta \right. \\ \left. + p \left\{ \sin(2\alpha - \theta) - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} (2\alpha - \theta) \right\} \right] d\theta \quad (13)$$

$$D_2 = \frac{r^2}{2} \left(\frac{r^2}{EI_x} + \frac{r^2}{GK} \right) \int_0^{2\alpha} \left[2\alpha \cot 2\alpha \sin \theta - \theta \cos \theta \right. \\ \left. + p \left\{ \sin \theta - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \theta \right\} \right] d\theta \quad (14)$$

z : 鉛直方向に働く P の単位長さごとの荷重

$$p = \frac{\frac{r^2}{2GK}}{\frac{r^2}{EI_x} + \frac{r^2}{GK}} = \frac{2a}{1+a}, \quad a = \frac{EI_x}{GK} \quad (15), (16)$$

EI_x : 47 の P の半径と軸とが 3 軸に 120° ずつ

GK : 47 の ねじり剛性

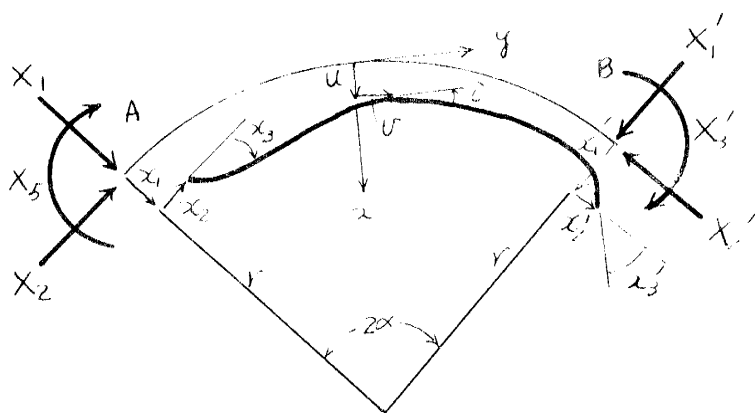


図-1. P -3 軸の内部変形

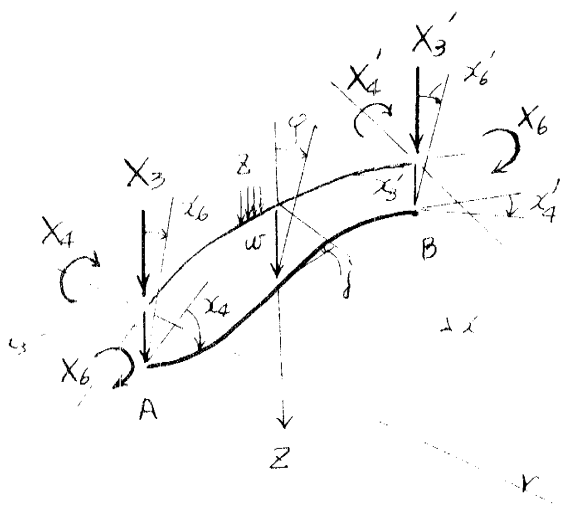


図-2. 1-4の角 変形



3. 直けたの撓角式

(1) 半径(接線)方向, 鉛直方向

このときにはよく知られた式に示す。

$$M_{AB} = 2EI_y (2\alpha_6 + \alpha_6' - 3 \frac{\alpha_1' - \alpha_1}{l})$$

(半径方向) (17)

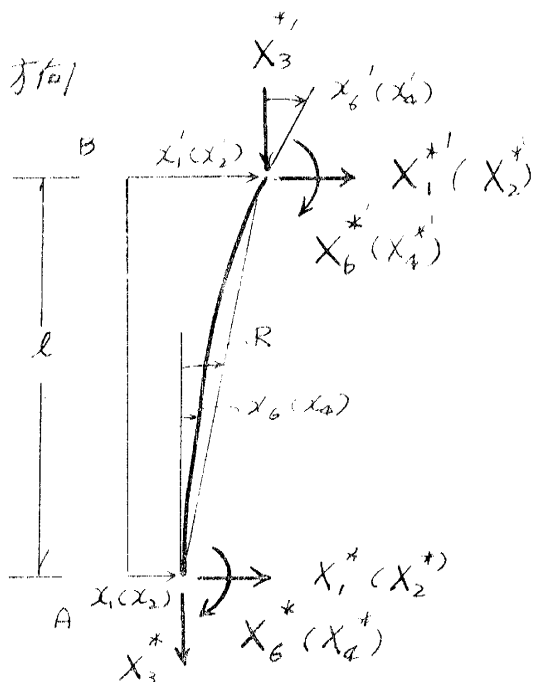


図 3 直けたの撓形

(2) ねじり

$$T_{AB} = \frac{GK}{l} (x_5' - x_5) \quad (18)$$

これらをまとめると

$$\mathbb{X}_3 = \Pi_3 \cdot X_3 \quad (19)$$

$$\mathbb{X}_3 = \{X_1^*, X_1', X_2^*, \dots, X_6^*\} \quad (20)$$

$$X_3 = \{x_1, x_1', x_2, \dots, x_6\}$$

$$\Pi_3 = \text{係数行列}$$

4. 節点における力の平衡

構造物の各節点において、全ての方向の力とモーメントは釣り合っていなければならない。

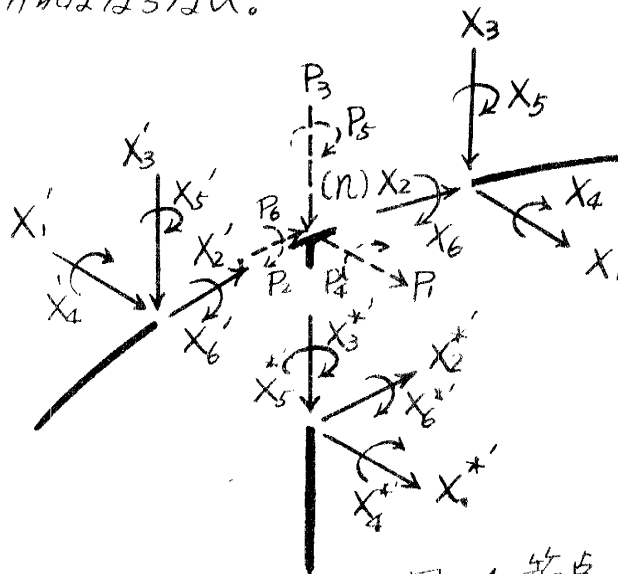


図-4. 節点 n の枝端力

この解法での仮定は

1. 変形後も部材の長さは変らない。
2. 変形後も部材が互いに節点でなす角度は変らない。

の2つで、普通の稜角法と同じである。

各方向についての平衡方程式 (X_3, X_4, X_6 については荷重項が入っているものとする) は次のようになる。

$$X_i + X_i' + X_i^{*'} - P_i = 0 \quad (21)$$

($i = 1, 2, \dots, 6$)

ここで

P_i : $i = 1, 2, 3$ 1, 2, 3 方向に節点に働く力
 $i = 4, 5, 6$ 4, 5, 6 方向の節点に働くモーメント

(21)により節点 1 つについて 6 本の未知数 X_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) に対応する 6 本の方程式が得られ、これを解けば所要の解となる。

5. あとがき

この解法の計算例については講演当日にゆずるが、2つの節点をもつ曲線セグメント型ラーメンでは、12本の未知数があり、その解を求めることは相当に面倒となるが、その演算に高速自動計算機を用いれば、この程度の連立方程式の解を得ることは極めて短時間で済むのであって、敢えて次数の高くなる変形法を用いたのは機械的に連立方程式を作り得てそれが容易に解かれるからである。この高速計算機の構造解析への活用がもっと積極的に図れると共に、より正しい解析への手段とされなければならぬと思う。

また、直セグと同様に、立体的な形にこのモーメント分配法²⁾の適用が、この場合にも可能であることをつけ加えたい。

1) 岡本舜三；軸線と全端面に垂直なる荷重と受ける円形曲り梁の研究、土木学会誌、Vol. 29, No. 3, 昭和18年、p. 241.

2) 古田俊彦；立体ラーメンの数値解析法、土木学会論文集 第33号