

2. フラットスラブに生ずる曲げモーメントの種々の性質について

金沢大学工学部

小 野 一 良

著者はすでに数回土木学会年次学術講演会または応用力学連合講演会においてフラットスラブが一樣な分布荷重を受けた場合およびすべての柱から等しい大きさのモーメントを受けた場合にフラットスラブに生ずる曲げモーメントを楕円函数を用いて解く方法を説明した。

これらの曲げモーメントの間には種々の関係が成立するので、この関係を使えば曲げモーメントの計算その他に便利である。

次にその数例を示す。

計算の便宜上次式による M_1, M_2, M_3 を用いてフラットスラブに生ずる曲げモーメントおよび捩りモーメントをあらわす。今後は M_1, M_2, M_3 も曲げモーメントと呼ぶことにする。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{D}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -\frac{D}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_3 &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= (1+\nu) M_1 + (1-\nu) M_2 \\ M_y &= (1+\nu) M_1 - (1-\nu) M_2 \\ M_{xy} &= (1-\nu) M_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

柱の間隔が a, b および α, β となるフラットスラブに一樣な分布荷重が作用した場合にスラブ上の (x, y) 点に生ずる曲げモーメントは次式によってあらわされる。

$$M_j = \frac{P}{4\pi} U_j(\xi, \eta; t, \alpha, \beta) \quad t \in \mathbb{R}, j=1, 2, 3 \quad (3)$$

$$\begin{cases} \text{ここに } P = 4abp, \quad \xi = \frac{x}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{2b}, \\ t = \frac{h}{a}, \quad \tau = \frac{\pi a^2}{4ab} \end{cases} \quad \text{----- (4)}$$

α は柱の半径であり、 α はスラブが柱から受ける反力の分布型式によって定まる常数である。 U_1, U_2 は ξ, η について偶函数となり、 U_3 は ξ, η について奇函数となることは容易に了解される。

フラットスラブが図-1の○で示す柱によって支えられ、 $P/4ab$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは X, Y なる座標軸を用いれば、

$$M_f = \frac{P}{4\pi} U_f \left(\xi, \frac{\eta}{2} ; t, \alpha \tau \right) \quad \text{----- (5)}$$

によって表わされる。同様にして●で示す柱によって支えられ、

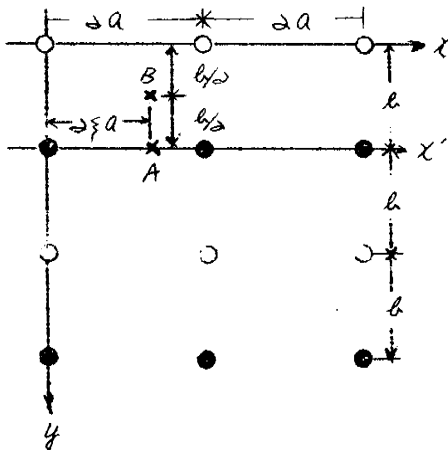


図 - 1

$P/4ab$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは X', Y なる座標軸を用いれば

$$M_f = \frac{P}{4\pi} U_f \left(\xi, 0 ; t, \alpha \tau \right) \quad \text{----- (6)}$$

によって表わされる。最後にすべての柱で支えられ、 $P/2ab$ なる分布荷重を受けたフラットスラブのA点に生ずる曲げモーメントは X', Y なる座標軸を用いれば

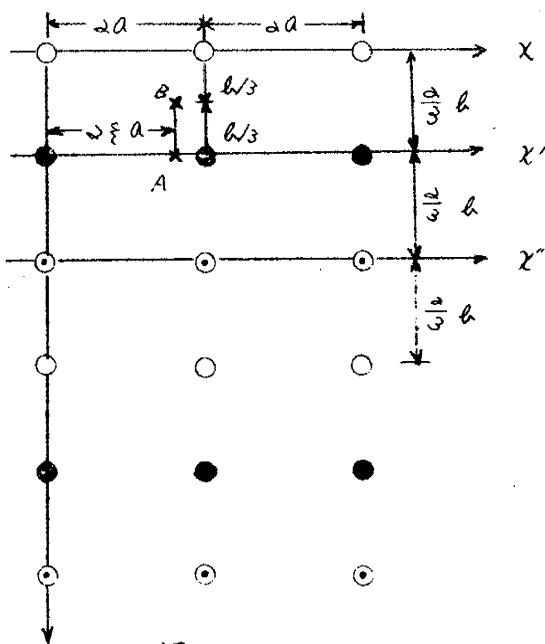
$$M_f = \frac{P}{4\pi} U_f \left(\xi, 0 ; \frac{t}{2}, 2\alpha \tau \right) \quad \text{----- (7)}$$

によって表わされる。これは(5) および(6) 式で示す曲げモーメントの和に一致するはずであるから次式が導かれる。

ただし $j = 1, 2, 3$ (8)

次にフラットスラブが図-2の○で示す柱によって支えられ、
 $P/4a$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは、 y なる座標軸を用いれば

$$M_j = \frac{\rho}{4\pi} U_j \left(\xi, \frac{1}{3}; t, \alpha t \right) \dots \dots (9)$$



●で示す柱によつて支えられ、 $P/4a$ なる分布荷重を受けている場合に A 点に生ずる曲げモーメントは x, y なる座標軸を用いれば

$$M_j = \frac{D}{4\pi} U_j(\xi, 0; t, \alpha k) \quad \text{----- (10)}$$

①で示す柱によって支えられ、 $P/4a$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは x, y なる座標軸を用いれば

$$M_j = \frac{\rho}{4\pi} U_j \left(\xi, -\frac{1}{3}; t, \infty \right) \dots \dots \dots (11)$$

○, ● および ⊙ で示す柱によって支えられ, $3P/4a$ なる分布荷重を受けている場合に A 点に生ずる曲げモーメントは X, Y なる座標軸を用いれば

$$M_j = \frac{D}{4\pi} U_j(\xi, 0; \frac{x}{\sigma}, \beta \alpha k) \dots \dots (12)$$

(12) 式による M_j は (9), (10), (11) 式の和に一致すること, および

$j = 1, 2$ のときに $U_j(\xi, \eta; t, \alpha k)$ は η に関して偶函数であることに注意すれば次式が導かれる。

$$U_j(\xi, \frac{1}{3}; t, \alpha k) = \frac{1}{2} U_j(\xi, 0; \frac{t}{3}, \alpha k) - \frac{1}{2} U_j(\xi, 0; t, \alpha k) \dots\dots (13)$$

ただし $j = 1, 2$ 。

同様にして図一ノにおけるB点に生ずる曲げモーメントを二通りの方法で求めることにより次式が得られる。

$$U_j(\xi, \frac{1}{4}; t, \alpha k) = \frac{1}{2} U_j(\xi, \frac{1}{2}; \frac{t}{2}, \alpha k) \dots\dots (14)$$

ただし $j = 1, 2$ 。

図一ニにおけるB点に生ずる曲げモーメントより

$$U_j(\xi, \frac{1}{8}; t, \alpha k) = \frac{1}{2} U_j(\xi, \frac{1}{2}; \frac{t}{3}, \alpha k) - \frac{1}{2} U_j(\xi, \frac{1}{2}; t, \alpha k) \dots\dots (15)$$

ただし $j = 1, 2$ 。

以上の諸式を用いれば $\eta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ となるときの

$U_1(\xi, \eta; t, \alpha k)$ および $U_2(\xi, \eta; t, \alpha k)$ は

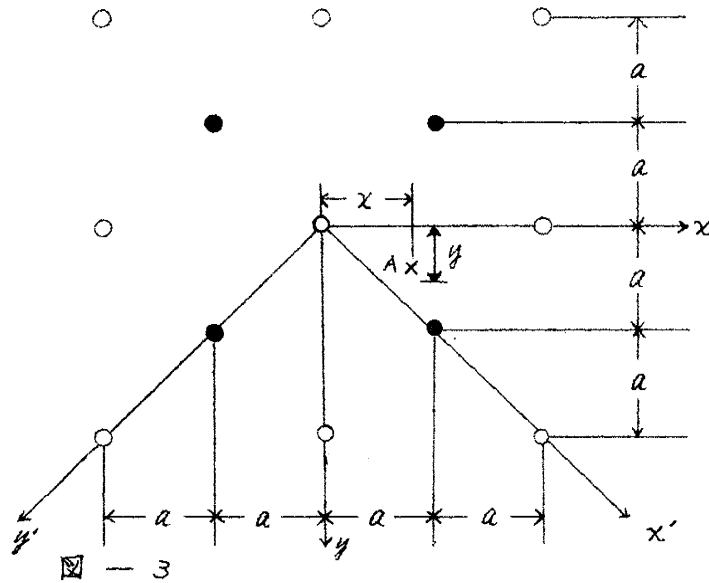
$\eta = 0$ の場合より誘導されることがわかる。しかして $\eta = 0$ のときには U_1 および U_2 は容易に計算を行うことができる。

特に $t = 1$ となるときは

$$U_j(\xi, \eta; 1, \alpha k) = -(-1)^j U_j(\eta, \xi; 1, \alpha k) \dots\dots (16)$$

ただし $j = 1, 2, 3$ 。

図一ニにおいてフラットスラブがOで示す柱によって支えられ、



$P/4ab$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは x, y なる座標を用いれば

$$M_f = \frac{P}{4\pi} U_f(\xi, \eta; 1, \alpha b) \text{-----}(17)$$

$$\text{ただし, } \xi = \frac{x}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{2a}$$

同様にして●で示す柱によつて支えられ、 $P/4ab$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは

$$M_f = \frac{P}{4\pi} U_f(\xi - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2}; 1, \alpha b) \text{-----}(18)$$

○および●で示す柱によつて支えられ、 $P/2ab$ なる分布荷重を受けている場合にA点に生ずる曲げモーメントは x', y' なる座標軸を用いれば

$$M_f' = \frac{P}{4\pi} U_f(\xi', \eta'; 1, 2\alpha b) \text{-----}(19)$$

$$\text{ここに } \xi' = \xi + \eta, \quad \eta' = -\xi + \eta \text{-----}(20)$$

x', y' 軸に関する曲げモーメントと x, y 軸に関する曲げモーメント

ットとの間には次の関係がある。

$$M'_1 = M_1, \quad M'_2 = M_3, \quad M'_3 = -M_2 \dots\dots\dots(21)$$

(17) および (18) 式によつて計算した曲げモーメントの和は (19) 式に一致することを要するため次式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} U_1(\xi+\gamma, -\xi+\gamma; 1, \alpha\alpha\ell) \\ &= U_1(\xi, \gamma; 1, \alpha\ell) + U_1(\xi-\frac{1}{2}, \gamma-\frac{1}{2}; 1, \alpha\ell) \\ U_2(\xi+\gamma, -\xi+\gamma; -1, \alpha\alpha\ell) \\ &= U_3(\xi, \gamma; 1, \alpha\ell) + U_3(\xi-\frac{1}{2}, \gamma-\frac{1}{2}; 1, \alpha\ell) \\ U_3(\xi+\gamma, -\xi+\gamma; 1, \alpha\alpha\ell) \\ &= -U_2(\xi, \gamma; 1, \alpha\ell) - U_2(\xi-\frac{1}{2}, \gamma-\frac{1}{2}; 1, \alpha\ell) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

これより

$$\begin{aligned} U_j(\xi, \gamma; 1, \alpha\ell) &= U_n\left(\frac{\xi+\gamma}{2}, \frac{\xi-\gamma}{2}; 1, \frac{\alpha\ell}{2}\right) \\ &+ U_n\left(\frac{1-\xi-\gamma}{2}, \frac{1-\xi+\gamma}{2}; 1, \frac{\alpha\ell}{2}\right) \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

$$\text{E.E.U} \quad \left. \begin{aligned} j=1 & \quad \text{のとき} \quad \pi=1, \\ j=2 & \quad \quad \quad \pi=3, \\ j=3 & \quad \quad \quad \pi=2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

フラットスラブがすべての柱から $-y$ 方向を軸とする T なるモーメントを受けた場合にスラブ上の (x, y) 点に主する曲げモーメントは次式によつてあらわされる。

$$M_j = \frac{T}{8\pi a} V_j(\xi, \gamma; x, \beta\ell) \dots\dots\dots(25)$$

$$\text{E.E.U} \quad j = 1, 2, 3$$

$$\xi = \frac{x}{2a}, \quad \gamma = \frac{y}{2b}, \quad x = \frac{b}{a}, \quad \ell = \frac{\pi\Delta^2}{4ab} \dots\dots\dots(26)$$

β は柱からスラブが受けるモーメントの伝達の型式によって定まる
 常数である。 V_1, V_2 は ξ について奇函数となり、 η について偶函数
 となる。 V_3 は ξ について偶函数となり、 η について奇函数となる。
 U_1, U_2 と同様に η

$$\eta = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \text{ となるとき}$$

$V_1(\xi, \eta; \alpha, \beta a)$ および $V_2(\xi, \eta; \alpha, \beta a)$ の値は
 $\eta=0$ の場合より誘導することができる。

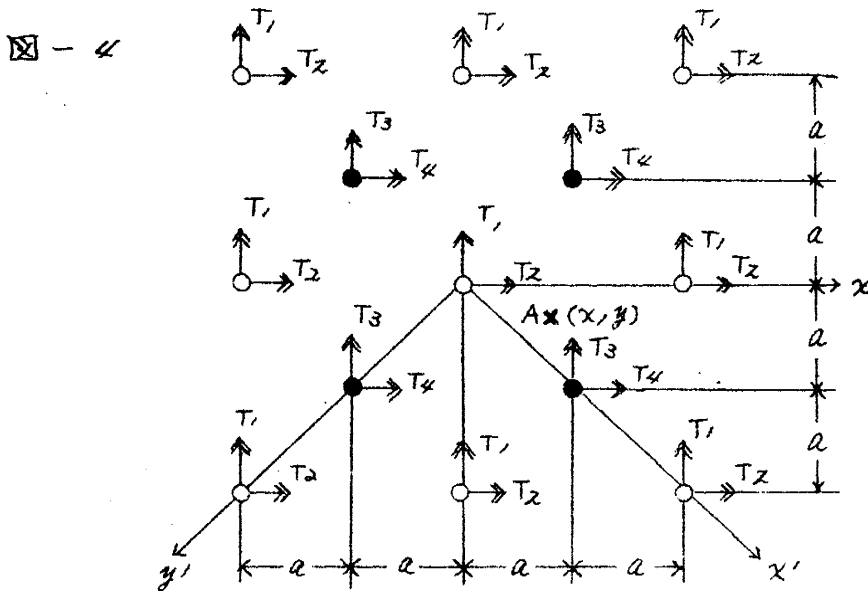


図-4において T_1 によつてA点に生ずる曲げモーメント M_1 は

$$\frac{T_1}{8\pi a} V_1(\xi, \eta; 1, \beta a) \text{ ----- (27)}$$

T_2 によつてA点に生ずる曲げモーメント M_2 は

$$\frac{T_2}{8\pi a} V_1(\eta, -\xi; 1, \beta a) = \frac{T_2}{8\pi a} V_1(\eta, \xi; 1, \beta a) \text{ (28)}$$

T_3 によつてA点に生ずる曲げモーメント M_1 は

$$\begin{aligned} & \frac{T_3}{8\pi a} V_1\left(\xi - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2}; 1, \beta k\right) \\ &= -\frac{T_3}{8\pi a} V_1\left(\frac{1}{2} - \xi, \frac{1}{2} - \eta; 1, \beta k\right) \dots (29) \end{aligned}$$

T_4 によつてA点に生ずる曲げモーメント M_1 は

$$\begin{aligned} & \frac{T_4}{8\pi a} V_1\left(\eta - \frac{1}{2}, -\xi + \frac{1}{2}; 1, \beta k\right) \\ &= -\frac{T_4}{8\pi a} V_1\left(\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} - \xi; 1, \beta k\right) \dots (30) \end{aligned}$$

$T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ とすればすべての柱に $-y'$ の方向を軸とした $\sqrt{2}T$ なるモーメントが作用することになる。

このモーメントによつてA点に生ずる曲げモーメント M_1 は

$$\frac{\sqrt{2}T}{4\sqrt{2}\pi a} V_1(\xi', \eta'; 1, 2\beta k) \dots (31)$$

$$\text{ただし } \xi' = \xi + \eta, \quad \eta' = -\xi + \eta \dots (32)$$

これはさきの4個の曲げモーメント M_1 の和に一致するはずであるから

$$\begin{aligned} & 2 V_1(\xi + \eta, -\xi + \eta; 1, 2\beta k) \\ &= V_1(\xi, \eta; 1, \beta k) + V_1(\eta, \xi; 1, \beta k) \\ &= V_1\left(\frac{1}{2} - \xi, \frac{1}{2} - \eta; 1, \beta k\right) \\ &= V_1\left(\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} - \xi; 1, \beta k\right) \dots (33) \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} & -T_1 = T_2 = -T_3 = T_4 = T \text{ とする場合より} \\ & 2 V_1(-\xi + \eta, \xi + \eta; 1, 2\beta k) \\ &= -V_1(\xi, \eta; 1, \beta k) + V_1(\eta, \xi; 1, \beta k) \end{aligned}$$

$$+ V_1\left(\frac{1}{2} - \xi, \frac{1}{2} - \eta; 1, \beta k\right) - V_1\left(\frac{1}{2} - \eta, \frac{1}{2} - \xi; 1, \beta k\right) \quad (34)$$

(33) 式と (34) 式との差より

$$\begin{aligned} & \Delta V_1(\xi + \eta, -\xi + \eta; 1, \alpha \beta k) - \Delta V_1(-\xi + \eta, \xi + \eta; 1, \alpha \beta k) \\ &= \Delta V_1(\xi, \eta; 1, \beta k) - \Delta V_1\left(\frac{1}{2} - \xi, \frac{1}{2} - \eta; 1, \beta k\right) \end{aligned} \quad (35)$$

上式を置き換えれば

$$\begin{aligned} & V_1(\xi, \eta; 1, \beta k) - V_1(\eta, \xi; 1, \beta k) \\ &= V_1\left(\frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) - V_1\left(\frac{1 - \xi + \eta}{2}, \frac{1 - \xi - \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

同様に (33) 式と (34) 式との和より

$$\begin{aligned} & V_1(\xi, \eta; 1, \beta k) + V_1(\eta, \xi; 1, \beta k) \\ &= V_1\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \\ & \quad - V_1\left(\frac{1 - \xi - \eta}{2}, \frac{1 - \xi + \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \quad (37) \end{aligned}$$

V_2 および V_3 の場合についても同様な式を導くことができる。

これらの式を併せて示せば

$$\begin{aligned} & V_j(\xi, \eta; 1, \beta k) - (-1)^j (\eta, \xi; 1, \beta k) \\ &= V_n\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \\ & \quad - V_n\left(\frac{1 - \xi - \eta}{2}, \frac{1 - \xi + \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_j(\xi, \eta; 1, \beta k) + (-1)^j (\eta, \xi; 1, \beta k) \\ &= -(-1)^n V_n\left(\frac{\xi - \eta}{2}, \frac{\xi + \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \\ & \quad + (-1)^n V_n\left(\frac{1 - \xi + \eta}{2}, \frac{1 - \xi - \eta}{2}; 1, \frac{\beta k}{2}\right) \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{KKU} \quad j = 1 \quad \text{のとき} \quad n = 1, \\ j = 2 \quad \quad \quad n = 3, \\ j = 3 \quad \quad \quad n = 2. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (40) \quad \text{とする.}$$