

層流中に於ける濃度の拡散

岐阜大学 増田 重臣

岐阜大学 山辺 春雄

静水中に於ける濃度の拡散は、いわゆる Brown 運動としてよく知られ、それは熱伝導の方程式で記述されるものである。所で媒質である流体が、静止（或は一様な平行運動）して居らず、速度分布に不均一がある場合濃度の拡散はどんな影響を受けるであろうか。

又、流体の速度分布は任意に取ることが出来ず、運動方程式と連続の式とをみたさねばならぬことは勿論である。我々は流れが定常ではめてゆるやかで、運動方程式の Stokes 近似が許される一例につき取扱った、加うるに二次元を問題にした。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

此の Stokes 近似は

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

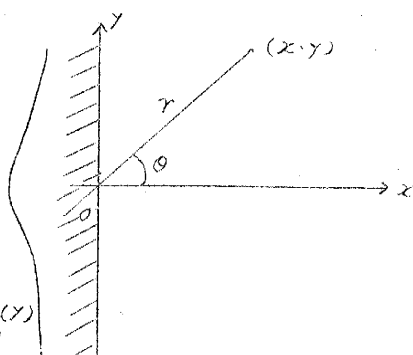
ψ : 流れ函数

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots \dots \dots (3)$$

$$\therefore \Delta^2 \psi = 0 \dots \dots \dots (4)$$

境界条件

$$\begin{aligned} u &= f(y) \\ v &= 0 \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} x=0: u=f(y), v=0 \\ x \rightarrow \infty: |u|, |v|, |\phi| \neq \infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\Delta(\Delta\phi) = 0 \quad (6)$$

変数分離法に依り

$$\Delta\phi = e^{-\mu x} \begin{cases} A' \cos \mu y \\ B' \sin \mu y \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi &= -\mu x e^{-\mu x} \begin{cases} C' \cos \mu y \\ D' \sin \mu y \end{cases} \\ &+ e^{-\mu x} \begin{cases} A' \cos \mu y \\ B' \sin \mu y \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

$$x=0: v=0$$

$$\therefore A' + C' = 0, B' + D' = 0$$

$$\therefore \phi = \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \{A(1+\mu x) \cos \mu y + B(1+\mu x) \sin \mu y\} d\mu \quad (9)$$

$$x=0: u=f(y) \text{ より } A, B \text{ が定まる。}$$

特に我々は簡単のため

$$f(y) = Q \delta(y) \quad \delta(y): \text{Dirac 函数} \quad (10)$$

を採用してみよう。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \left(\frac{1}{\mu} + x \right) \sin \mu y d\mu \\ &= \frac{Q}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\therefore U_r = \frac{Q}{\pi} \frac{1}{r} (1 + \cos 2\theta),$$

$$U_\theta = 0 \quad (12)$$

拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (v \cdot \nabla) C = K^2 \Delta C \quad (13)$$

C : 濃度 K^2 : 拡散係数,

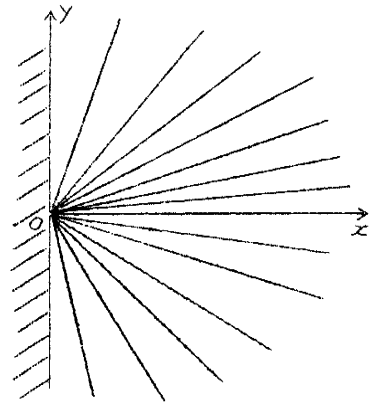
v : 媒質流体の速度

$$\text{境界条件: } \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad x=0$$

$$\text{初期条件: } t=0, \quad C = h(x, y) \quad (14), (15)$$

$$\therefore \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{Q}{\pi} \frac{1}{r} (1 + \cos 2\theta) \frac{\partial C}{\partial r} = K^2 \Delta C \quad (16)$$

$$\frac{Q}{\pi} \equiv \alpha K^2$$



(20)

今 $|\alpha| \ll 1$ の場合につき考えてみる。

$$C(-x, y) = C(x, y)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (\partial \cdot \nabla C) &= K^2 \Delta C \quad t > 0 \quad -\infty < x, y < +\infty \\ t = 0, C &= h(x, y). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = K^2 \Delta C_0, \quad \frac{\partial C_n}{\partial t} + K^2 \alpha \frac{1}{r} (1 + \cos 2\varphi) \frac{\partial C}{\partial r} = K^2 \Delta C_{n-1}$$

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y, t; \xi, \eta, 0) h(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$C_n = C_0 - \alpha \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y, t; \xi, \eta, s) (1 + \cos 2\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial r} d\xi d\eta$$

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi$$

$$H(x, y, t; \xi, \eta, s) = \frac{1}{4\pi K^2(t-s)} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4K^2(t-s)} \right\}$$

特に $h(x, y) = A \{ \delta(x+a) + \delta(x-a) \}$

$$C_0 = \frac{1}{4\pi K^2 t} \left\{ \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2 + y^2}{4K^2 t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(x+a)^2 + y^2}{4K^2 t} \right\} \right\}$$

以下略。