牧田川の流砂について

岐阜大学　増田　重臣
岐阜大学　河村　三郎

1 緒　言

牧田川は揖斐川の支流で大垣市の南方において揖斐川に合流している。流域面積は182K㎡で全流域の90％は山地である。牧田川の中流部の河幅は300〜400m 途中多数の横堤が設けられている。下流部で河幅が70m前後となっているため中流部に砂礫が多量に堆積し河床は堤内地より高く洪水時以外は普通河床上を水が流下せず地下水となっている。河床勾配は1/180〜1/1000であり砂礫の平均粒径（通過率50％に相当する粒径）は中流部で9〜26mmである。この様な河川に現状で最も合理的と考えられる公式．Einstein，Kalinske，Shields．Brown．椿．佐藤一吉川一芦田の諸公式を適用してこの河川の流量が計画洪水流量1200m³/s程度の時の流砂量を推定しよう。

河川の流砂量の実測は非常に面倒であり．測定法も確定して居なくて測定の方法により大きな誤差を生じ研究を要する点が非常に多くあります。従来は出水前後の河床変動や砂防ダム等に貯溜された土砂量等により推定して来たに過ぎない状態である。この流砂量の問題は Du Boys（1879）以来多くの人により研究され流砂量を推定する実験公式が発表されている。H. A. Einstein．Kalinske Shields．Brown，椿．の各公式最近では1956年にK. B. Schroeder とC. H. Hembree が Turbulent Flume 等で得られた米国西部の Middle Loup River．Niobrara River，Snake River，Mississippi River，Platte River の5河川の資料を解析して Einstein 公式を修正した方法がこれらの実測値とさらによく一致する事を認めこれを Modifieid Einstein Procedure（修正アインシュタイン法）と呼んでいる．次で

1958年に佐藤—吉川—芦田は粒径が1.38～4.58の範囲でほぼ一様粒径の5種類の砂を用い全長114m, 水路巾80cmの実験水路で実際河川に近い状態で実験を行い　Gilbertの実験資料も用いて公式を導き　利根川等において現地観測を行い公式が成立する事を確めている。これらの公式はいずれも小粒径の砂を用いて実験を行っているから日本の河川の如き大粒径でしかも勾配大なる河川には適合しない点が多々あると考えられる。併し実測値をもとにした関係式を使用する部分があるから従来の単なる実験公式によるよりも計算結果が比較的よく適合するのではないかと考えられる.

2. 流砂量推定の式

1) Shields

$$q_B = \frac{10\,q\,I(\tau_0 - \tau_c)}{\sigma\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - 1\right\} g d} \quad \cdots\cdots (1)$$

又ここで　$\tau_* = \dfrac{u_*^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\} g d}$,　$\tau_{*c} = \dfrac{u_{*c}^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\} g d}$,　$q_{B*} = \dfrac{q_B}{u_* d}$

とすれば

$$q_{B*} = 623\, a'\, \tau_*(\tau_* - \tau_{*c}) \qquad a = \frac{u_m}{u_*} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる.

2) 椿

$$q_B = \frac{6.76\,u_*}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\}\sigma g}(\tau_0 - 0.8\,\tau_c)\left[\frac{u_*^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\} g d}\right]^{0.8}\left(\frac{k_s}{d}\right)^{-0.435} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\log_{10}\frac{k_s}{d} = 3.48\left(1 - 0.225\sqrt{\frac{\left\{\frac{\sigma}{\rho}-1\right\} d}{HI}}\right) \quad \cdots\cdots (4)$$

又は　$$q_{B*} = 25\,\tau_*^{0.8}(\tau_* - 0.8\,\tau_c)\left(\frac{k_s}{d}\right)^{-0.735} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\log_{10}\frac{k_s}{d} = 3.48\left(1 - 0.225\left(\frac{1}{\tau_*}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \cdots\cdots (6)$$

この式の適用範囲は粒径dが0.3mm以上　$\tau_0/(\sigma-\rho)gd \fallingdotseq 1$　の場合に限られ　浮遊砂も含められている。

3) Einstein

$$i_T q_T = i_s q_s + i_B q_B = i_B q_B\{P I_1 + I_2 + 1\} \quad \cdots\cdots (7)$$

$$i_B q_B = \sqrt{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\} g d^3}\ \varphi'\left\{\frac{\{(\frac{\sigma}{\rho})-1\}d}{R' I}\cdot \xi \cdot Y \cdot \left(\frac{\beta}{\beta_x}\right)^2\right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

$$i_S q_S = 11.6\, u_* \cdot C_a\, a\, (P I_1 + I_2) \quad \cdots\cdots (9)$$

$$P = 2.303 \log_{10}\left\{\frac{30.2\, H x}{k_s}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$I_1 = 0.216 \frac{(\frac{a}{h})^{z-1}}{\{1-(\frac{a}{h})\}^z}\int_{\frac{a}{h}}^{1}\left\{\frac{1-(\frac{z}{h})}{\frac{z}{h}}\right\}^z d\left(\frac{z}{h}\right) \quad \cdots\cdots (11)$$

$$I_2 = 0.216 \frac{(\frac{a}{h})^{z-1}}{\{1-(\frac{a}{h})\}^z}\int_{\frac{a}{h}}^{1}\left\{\frac{1-(\frac{z}{h})}{\frac{z}{h}}\right\}^z \log_e\left(\frac{z}{h}\right) d\left(\frac{z}{h}\right) \quad \cdots\cdots (12)$$

$Z = \frac{w_0}{\kappa u_*}$ ， ξ は $\frac{d}{X}$ の関数である．X は

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d_{65} u_*}{11.6\, \nu x} > 1.80 \text{ のとき} & X = 0.77\frac{d_{65}}{x} \\ \frac{d_{65} u_*}{11.6\, \nu x} < 1.80 \text{ のとき} & X = 1.39\left(\frac{11.6\, \nu}{u_*}\right) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

$\left(\frac{\beta^2}{\beta_x^2}\right)$ は $\frac{\beta^2}{\beta_x^2} = \left\{\log_{10} 10.6 \Big/ \log_{10} 10.6\left(\frac{X x}{d_{65}}\right)\right\}^2 \quad \cdots\cdots (14)$

なお Einstein は u_* として $u_*^2 = g R_b' I_e$ とすべき事を提案している．R_b' は河床砂による抵抗の径深であって次式によって決定される．

$$\frac{U_m}{\sqrt{g R_b' I_e}} = 5.75 \log_{10}\left(\frac{12.27 R_b' x}{d_{65}}\right) \quad \cdots\cdots (15)$$

ここで $\Phi = \frac{q_B}{\sqrt{\{(\frac{\sigma}{\rho})-1\} g d^3}}$ とすれば $q_{B*} = \Phi\, \tau_*'^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots (16)$

4) Kalinske

$$q_B = \sqrt{g H I}\cdot d \cdot F\left\{\frac{H I}{\{(\frac{\sigma}{\rho})-1\} d}\right\} \text{ 又は } q_{B*} = F(\tau_*) \quad \cdots\cdots (17)$$

$$q_S = q \cdot C_a \cdot P e^{\frac{15a}{H}\left(\frac{w_0}{u_*}\right)} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\frac{C_0}{\Delta F(w_0)} = 5.55\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u_*}{w_0}\right) e^{-\left(\frac{w_0}{u_*}\right)^2}\right]^{1.61} \quad \cdots\cdots (19)$$

上式において $a = 0$ のとき濃度 $C_a = C_0$．故に

$q_S = q \cdot C_0 P$ となる．$\cdots\cdots (20)$

5) Brown

$$q_B = 10\, u_* d\left\{\frac{u_*^2}{\{(\frac{\sigma}{\rho})-1\} d g}\right\}^2 \text{ 又は } q_{B*} = 10\, \tau_*^2 \quad \cdots\cdots (21)$$

6) 佐藤－吉川－芦田

$$q_B = \varphi \frac{\sigma}{\sigma-\rho}\cdot \tau_0 u_* F' \quad \text{又は} \quad q_{B*} = \tau_* \varphi F' \cdots\cdots \quad (22)$$

ここにφは、

$$\left.\begin{array}{ll} n \geqq 0.025 \text{ のとき、} & \varphi = 0.62 \\ n \leqq 0.025 \text{ のとき、} & \varphi = 0.62\left(\frac{1}{40n}\right)^{3.5} \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (23)$$

7) Modified Einstein Procedure

Einstein 式のΨの代りにΨ_*を用いΦ_*とΨ_*との関係において形式的にΨ_*の代りに次式を用いる．

$$\left.\begin{array}{ll} d \geqq 2.5\, d_{35} \text{ のとき、} & \Psi_m = 0.4\frac{1.65 d}{(RI)_m} \\ d \leqq 2.5\, d_{35} \text{ のとき、} & \Psi_m = \frac{1.65 d_{35}}{(RI)_m} \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (24)$$

この場合 $\frac{\sigma}{\rho} = 2.65$ としている．上式にて与えられるΨ_m を用いて Φ_* を求める。

上式中の$(RI)_m$ は 次式により決定される。

$$\frac{u_m}{\sqrt{g(RI)_m}} = 5.75 \log_{10}\left(\frac{12.27 H x}{d_{65}}\right) \cdots\cdots \quad (25)$$

実測値と一致させるためにΦ_* の $\frac{1}{2}$ を とって

$$i_B q_B = i_B \left[\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\} g d^3\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Phi_*}{2} \cdots\cdots \quad (26)$$

によって算出する．そこで I_1, I_2 の Z としては実測値より決めた値をとる。

8) 沈降速度 w_0 の計算式

C_D を抵抗係数、Re を Reynolds 数とすれば、

$$R_* = \frac{\sqrt{\{(\frac{\sigma}{\rho})-1\} g d^3}}{\nu}, \qquad R_{w*} = \frac{w_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\{(\frac{\sigma}{\rho})-1\} g \nu}},$$

R_*とR_{w*}との関係は、 $$R_{w*} = \left(\frac{4}{3C_D}\right)^{\frac{3}{4}} R_*^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots \quad (27)$$

Stokes Law が適用される Reynolds 数の範囲では $C_D = \frac{24}{Re}$ であるから、 $R_{w*} = \frac{R_*^2}{54\sqrt{2}}$ である． $\cdots\cdots$ (28)

この式よりR_{w*}を求めてw_0 を計算する。又、William W. Rubey は

(μ ＝粘性係数)

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2}{3}g\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)-1\right\}d+\frac{36\mu^2}{\rho^2 d^2}}-\frac{6\mu}{\rho d} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

にて表わしている。

9.) 上記各公式の記号を次に示す。

σ ：河床土砂の密度

ρ ：水の密度

R ：径深（水深 H にほぼ等しい。）

I ：水面勾配

I_e ：エネルギー勾配で摩擦勾配に等しい。

g_B ：河川単位幅あたりの掃流砂量。

g_s ：　〃　浮流砂量。

g_T ：　〃　総流砂量。

g ：　〃　流　量。

U_m ：平均流速。

U_* ：摩擦速度。 $u_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\sqrt{gHI}$

ω_0 ：土砂の沈降速度。

a ：河床よりのある高さ。

C_a ：河床より高さ a なる点の濃度。（P.P.m）

C_0 ：河床における濃度。

d ：平均粒径。

d_{35} ：通過率３５％に相当する粒径。

d_{65} ：　〃　６５％　〃　。

τ_0 ：掃流力， $\tau_0=\rho gHI$ 。

τ_c ：限界掃流力。 $u_{*c}=\sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}}$

k_s ：相当粗度． d_{65} に相当する。

i_T ：与えられた粒径範囲の砂が全輸送量において占める割合。

i_s ：与えられた粒径又は粒度範囲の土砂が浮流土砂量においてしめる割合。

i_B ：与えられた粒径又は粒度範囲の土砂が掃流土砂量においてしめる

割合

K ：Karman 常数　$K=0.4$。

X ：河床に凸出している粗い砂や層流底層の遮蔽作用を受ける最大粒径。

Y ：揚圧力の変化を示す係数で d_{65}/δ の関数。

ξ ：小粒径の砂が粗い砂に遮蔽され，あるいは層流底層の影響を受ける度合を示す係数で d/X の関数である。

$\Delta F(\omega_0)$：沈降速度 ω_0 なる砂が底質中にしめる割合。

F' ：τ_0/τ_c の関数である。

n ：Manning 粗度係数

ν ：動粘性係数

3. 牧田川の流砂量の推定

1) 浮流砂実測結果と各公式の比較

牧田川の流砂量の推定にはどの公式が比較的よく適合するかを知るために台風21号（33年9月17日）の影響により集中豪雨となり関ヶ原で200 mm，上流部で248 mm の降雨があり洪水となった。この時の観測結果と出水前に測定された粒度分布の粒径を用いて計算した結果を比較検討して見よう。流砂量の比較は烏江量水標地点のものを比較する。

粒度分布曲線から，$d_{35}=0.023^{cm}$，$d_{50}=0.92^{cm}$，$d_{65}=1.95^{cm}$。$\sigma=2.585$，$\nu=0.011\ cm^2/s$（16°C）平均粒径として d_{50} を用いた。洪水時の観測から $H=2.20^{m}$，$I=1/690=0.00145$ $U_m=1.15\ m/s$，これらの値より計算した結果を表―(2)に示す。

次に浮流砂の濃度と浮流砂の粒度分布から浮流砂量を求むれば，

表―(1)　浮流砂の粒度分布

篩(mm)	0.075	0.11	0.25	0.40	0.85
通過百分率 %	0.4	2.1	76.4	98.3	100
$\Delta F(D)$ %	1.7	74.3	21.9	1.7	0

$\Delta F(D)$ はその粒径の砂が全体の浮流砂量中にしめる割合．表一(1)の粒度分布曲線から．$d_{35}=0.016^{cm}$, $d_{65}=0.022^{cm}$，$d_{50}=0.0188\,cm$, $U_m=1.15^m$（実測値）　$H=2.30^m$（測定点の水深）$I=0.00145$（実測）　又観測時の濃度は底面より 15^{cm} で 692 P.P.m.，25^{cm} で 383 P.P.m.，水面より 30^{cm} で 50 P.P.m. であった。この観測は減水時に観測されたものであるから　最大濃度は相当程度これより増加すると考えられる。

これらの観測資料より Kalinske の q_S，Einstein の q_S を求めた。この結果を表(2)の実測値の欄に示した。

表一(2)　流砂量 $cm^3/s.cm$

Kalinske			佐藤	Brown	椿	Shields	Einstein	実測値	
q_S	q_B	q_T						$q_{S(K)}$	$q_{S(E)}$
1.864	11.061	12.925	2.125	7.645	3.537	24.344	26.026	1.00	3.64

実測値の欄の(K)は Kalinske の方法．(E)は Einstein の方法による結果を示す，この実測の結果からこの河川では Kalinske の公式．Brown の公式が適用していると考えられる．佐藤—吉川—芦田の公式は過少値を示し．Shields は過大値を与えている．Einstein 公式による結果及び修正アインシュタイン法による結果は講演時に述べる．

2）牧田川流砂量の推定

河床の粒度分布は次の如くである．(No.112の地点)

表—(3)　通過百分率　%

篩 (mm)	0.15	0.3	0.6	1.2	2.5	5.0	7.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0	40.0	50.0	60.0	80.0	100	d_{35}	d_{50}	d_{65}
%	0.4	1.7	4.5	14.2	23.0	29.6	33.9	40.8	50.3	37.0	63.1	67.9	76.2	84.0	87.6	95.1	100	31.5	14.7	31.5

$D=0.017^{m^3/s}$　　$H=2.47^m$ と $3.00m$，$I=\frac{1}{370}=0.0027$．$\frac{\sigma}{\rho}=2.585$

各公式による計算結果を示せば　次の如くである。

表－(4)　流砂量　$m^3/hr\,m$

水深 (m)	Kolinske			佐藤	Brown	椿	Einstein	Shields	水面巾 (m)
	g_S	g_B	g_T						
2.47	1.458	12.586	14.044	2.394	10.823	4.056	33.822	44.280	221
3.00	3.525	17.891	21.416	3.178	19.383	5.710	47.717	102.653	250

前述 1.)の考察と表－(4)からこの河川の計画洪水流量($1200\ m^3/sec$)に対する流砂量は $2000\ m^3/hr$ ～ $6000\ m^3/hr$ 程度と推定される。

4. 移動河床模型の流砂量より実河川の流砂量の推定について

移動河床模型（水平 1/250, 垂直 1/30 ）を製作して流砂量の実験を行っているが，模型の流砂量より実河川の流砂量を求めるには相似律が成立しないため次式を用いて推定しているがかなり良好な結果を示している。

佐藤－吉川－芦田の公式において現地河川と模型河川の各々に添字1, 2, を附して区別し g_{B1}/g_{B2} の比をとれば

$$\frac{g_{B1}}{g_{B2}} = \frac{\varphi_1 \delta_1' \tau_1 u_{*1} F_1'}{\varphi_2 \delta_2' \tau_2 u_{*2} F_2'} = \frac{\varphi_1 \delta_1' \omega H_1 I_1 \sqrt{g H_1 I_1}\ F_1'}{\varphi_2 \delta_2' \omega H_2 I_2 \sqrt{g H_2 I_2}\ F_2'}$$

$$= \delta' \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \frac{F_1'}{F_2'} \left(\frac{H_1 I_2}{H_2 I_2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{ここに } I = \frac{H}{L}$$

$$\therefore \frac{g_{B1}}{g_{B2}} = \delta' \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\left(\frac{F_1'}{F_2'}\right)\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots (30)$$

ここに $\delta_1' = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \rho}$,　$\delta_2' = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \rho}$ であるから

$$\delta' = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\sigma_2 - \rho}{\sigma_1 - \rho}\right),$$

F_1' に関しては $\frac{\tau_{c1}}{\tau_1} = \frac{u_{*c1}^2}{u_{*1}^2}$，普通 $F_1' \fallingdotseq 1$ である。

F_2'　〃　$\frac{\tau_{c2}}{\tau_2} = \frac{u_{*c2}^2}{u_{*2}^2}$,

φ_1, φ_2 に関しては $n \geqq 0.025$ のとき $\varphi = 0.62$

$n \leqq 0.025$ のとき $\varphi = 0.62\left(\frac{1}{40n}\right)^{3.5}$

例として表(4)の水深 2.47m に相当する $\frac{g_{B1}}{g_{B2}}$ の値を計算すれば，

牧田川の流砂について（追加）

表 —— (4)

水深 (m)	水面幅 (m)	単位	Modified Einstein			Kalinske			Brown	Einstein ⊛	Shields	佐藤・吉川・芦田	椿
			q_S	q_B	q_T	q_S	q_B	q_T					
2.47	221	m³/hr·m	1.794	5.114	6.908	1.458	12.586	14.044	10.823	33.822	44.280	2.394	4.056
3.00	250	m³/hr·m	5.381	12.144	17.525	3.525	17.891	21.416	19.383	47.711	102.653	3.178	5.710
2.47	221	m³/hr	396.47	1130.19	1526.67	322.22	2781.51	3103.73	2391.88	7474.66	9785.88	529.074	896.38
3.00	250	m³/hr	1345.25	3036.00	4381.25	1057.50	5367.30	6424.8	4845.75	11927.75	25663.25	794.500	1427.58

表 —— (2) (cm³/s·cm)

Modified Einstein			Kalinske			Brown	Einstein ⊛	Shields	佐藤・吉川・芦田	椿	実測値	
q_S	q_B	q_T	q_S	q_B	q_T						(K)q_s	(E)q_s
1.752	2.416	4.168	1.864	11.061	12.925	7.645	26.026	24.344	2.125	3.531	1.000	3.640

(K)q_s は実測値（浮遊濃度）をもとにしてKalinskeの式より求めた浮遊砂量を示す。

(E)q_s は 〃 〃 Einstein 〃 〃。

表(2),(4)中のEinstein⊛の値については $\frac{u_m}{\sqrt{gR_b' I_e}} = 5.75\log_{10}\left(\frac{12.27 R_b' x}{d_{65}}\right)$ より求めた R_b' を用いて各粒径毎に計算すると $1/\psi_* = \tau_*$ の値が大部分の粒径範囲において0.4以下になり流砂量の計算が出来ない。又 $R_b' = R$ として計算すると0.6mm以下の粒径が全然流下しないという不合理なものとなるため公式を適用して各粒径毎の計算は出来ない。故に簡易法として全体の平均粒径を用い $R_b' = H$ として τ_* を計算し q_{B*} を求めて流砂量を計算した。

この河川の様な急勾配、大粒径の河川にはEinsteinの公式は適用出来ない。

$H_1/H_2 = 130$,　$\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = 250$,　$n_1 = 0.035$,　$n_2 = 0.011$,

$\sigma_1 = 2.585$,　$\sigma_2 = 2.590$,　$d_{m1} = 1.47^{cm}$,　$d_{m2} = 0.0533^{cm}$,

これらの値より，

$$\frac{q_{B1}}{q_{B2}} = 1.0012\left(\frac{0.62}{10.927}\right)\left(\frac{1}{0.978}\right)(130)^3\left(\frac{1}{250}\right)^{\frac{3}{2}} = 32.13$$

$$\therefore \frac{q_{B1}}{q_{B2}} = 32.13 \quad \cdots\cdots (31)$$

模型において $247/130 = 1.9^{cm}$ の水深で行った流砂量の実験では，$q_{B2} = 0.453\ {}^{cm^3}/_{s.cm}$（水面幅 80^{cm} の平均流砂量）であった。故に q_{B1} は　$q_{B1} = 32.13 \times 0.453 = 14.555\ {}^{cm^3}/_{s.cm}$　これを ${}^{m^3}/_{hr.m}$ に直せば $5.24\ {}^{m^3}/_{hr.m}$ となる。（表−(4)参照）

この様に模型の流砂量より実河川の流砂量を推定し得る。

但し，(30)式は模型用砂と実河川の砂礫分布曲線が相似なる砂を模型用砂として使用した場合に適用出来る併し分布曲線が相似でない場合には砂礫混合係数を考えなければならない。