# 開水路乱流の温度変化

—— 高 敏郎 ——

要旨　開水路乱流に於てその水の温度が気温及び地温によって如何なる変化を受けるかを、熱伝達の微分方程式を解いて理論式を導いたものである。

## 1. 緒論

寒冷地を流れる河川の水温は可なり低いのが普通である。従って灌漑用水路が斯様な河川からその水を取入れる場合には、田畑の作物に害を及ぼす結果になる故に、何らかの方法によって用水路の水温を上昇させることが肝要である。

河川、人工水路等の流れは略々完全な乱流状態を呈して居り、従って流れの方向の速度の他に鉛直方向、横方向の分速度をも有して居り、このために熱の移動は静水中或は層流中に於ける夫れよりも遥かに著しいのである。著者は等速定流の二次元乱流中に於ける熱伝達の微分方程式を解いて、水温の変化と距離、水深、流速等との関係をもとめた。一般に水温は気温、地温等に影響されるもので、著者はこの両者を考えることにしてこれを境界条件に採用した。

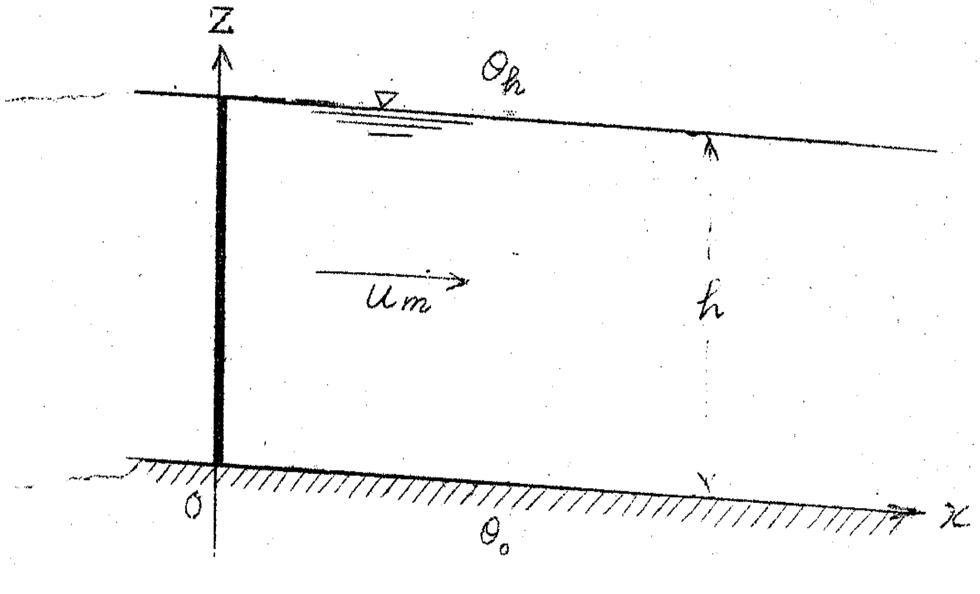
## 2. 開水路流れの熱の移動の微分方程式及び境界条件

### (1) 微分方程式

完全に乱れている二次元の等速定流を考え、流れの方向に$x$軸、鉛直方向に$z$軸をとる。この流れの中に於ける熱の移動の微分方程式は、今流体の温度を$\theta$、密度を$\rho$、比熱を$c$、$x$方向の流速を$u$、水の熱伝導率を$k_0$　及び攪乱による流れの方向、鉛直方向の熱伝達率を夫々$k_x$、$k_z$とすると次式で表わされる。(1)

$$\rho c u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(k_0 + k_x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(k_0 + k_z)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right] \quad \cdots\cdots (1)$$

一般に右辺の第一項は第二項に比較して小であるので第一項を省略し、尚完全に乱れている流れにおいては、$k_0$は$k_z$に比して小さいので$k_0$も無視すれば、(1)式は



$$\rho c u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \cdots\cdots (2)$$

となる。こゝに流速u、熱伝達率$k_z$はzの或る函数であるが、微分方程式の解法を容易にするために之等の値を一定と考え、水深全体に亘る平均値を採用することにした。そうすると(2)式は

$$\rho c u_m \frac{\partial \theta}{\partial x} = k_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \cdots\cdots\cdots (3)$$

となる。こゝに$u_m$、$k_m$はu、$k_z$の平均値を表わす。

流体の粘性係数を$\mu$とすると、乱れによる熱伝達率$k_m$は[2]

$$k_m = k_0 \frac{\varepsilon_m}{\mu} \cdots\cdots\cdots (4)$$

$\varepsilon$は渦粘性係数と呼ばれるもので、水深をh、水面勾配をJとすると

$$\varepsilon = \frac{(h-z)gJ}{du/dz} \cdots\cdots\cdots (5)$$

で表わされる。[3] 今鉛直方向の流速分布を

$$u = v_*\left(a + \frac{1}{\varkappa}\log_e \frac{z}{d}\right) \cdots\cdots (6)$$

とすると[4]（こゝにa、$\varkappa$は常数で$\varkappa = 0.4$なる値をとる。dは水路底面の粗さを示すもので、長さのdimensionを有する。$v_*$は摩擦速度とよばれ$v_* = \sqrt{ghJ}$で表わされる。）

$$\frac{du}{dz} = \frac{v_*}{\varkappa}\frac{1}{z}$$ となり(5)式は

$$\varepsilon = \frac{\varkappa\sqrt{gJ}}{\sqrt{h}} z(h-z) \cdots\cdots (7)$$

となる。そこで$\varepsilon$の水深全体に亘る平均値$\varepsilon_m$は

$$\varepsilon_m = \frac{1}{h}\int_0^h \varepsilon\, dz = \frac{\varkappa\sqrt{gJ}}{h\sqrt{h}}\int_0^h z(h-z)\, dz$$

$$= \frac{0.4}{6}\sqrt{\frac{gJ}{h}}\, h^2 \cdots\cdots (8)$$

(2) 境界条件

今大気及び大地の温度を夫々$\theta_h$、$\theta_0$とし、水面と空気との間及び水底と土地との間に於ける熱伝達率を夫々$\beta_h$、$\beta_0$とすると、水路底面即ち $z=0$ に於ては

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - \beta_0(\theta - \theta_0) = 0$$

即ち $\frac{\partial \theta}{\partial z} - \beta_0\theta = -\beta_0\theta_0$ となる。水面即ち $z=h$ に於ては

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + \beta_h(\theta_h - \theta) = 0$$

即ち $\dfrac{\partial\theta}{\partial Z}-\beta_h\theta=-\beta_h\theta_h$ となる。

$\beta_0$, $\beta_h$は管内の流れに於ては Reynolds 数、境界層の状態に依って左右される値で(5) 開水路の流れに於ても同様のことが言い得ると思われるが、之は別の重要な問題であって今后の研究に俟つ所であるから、本文に於ては之には触れないことにする。

次に初期條件として$x=0$に於て鉛直方向の任意の温度分布を

$\theta=f(Z)$ とする。

以上微分方程式、初期、境界諸條件を書き直すと、

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{k_m}{\rho c u_m}\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2} \cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\begin{cases} Z=0: \dfrac{\partial\theta}{\partial Z}-\beta_0\theta=-\beta_0\theta_0 \cdots\cdots\cdots(9) \\ Z=h: \dfrac{\partial\theta}{\partial Z}-\beta_h\theta=-\beta_h\theta_h \cdots\cdots\cdots(10) \\ x=0: \theta=f(Z) \cdots\cdots\cdots(11) \end{cases}$$

3、 微分方程式の解

$\rho$、$c$、$k_m$はすべて温度によって異る値をとるのであるが、この差は僅少であるから之等の値をすべて一定と考えることにする。 この場合解を二つに分けて$\theta=\theta'+\theta''$と置き、$\theta'$及び$\theta''$は夫々次の諸式を満足する様にする。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta'}{\partial x}=\dfrac{k_m}{\rho c u_m}\dfrac{\partial^2\theta'}{\partial Z^2} \cdots\cdots\cdots(12) \\ \left(\dfrac{\partial\theta'}{\partial Z}-\beta_0\theta'\right)_{Z=0}=-\beta_0\theta_0 \cdots\cdots\cdots(13) \\ \left(\dfrac{\partial\theta'}{\partial Z}-\beta_h\theta'\right)_{Z=h}=-\beta_h\theta_h \cdots\cdots\cdots(14) \end{cases}$$

$$\frac{\partial\theta''}{\partial x}=\frac{k_m}{\rho c u_m}\frac{\partial^2\theta''}{\partial Z^2} \cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\left(\frac{\partial\theta''}{\partial Z}-\beta_0\theta''\right)_{Z=0}=0 \cdots\cdots\cdots(16)$$

$$\left(\frac{\partial\theta''}{\partial Z}-\beta_h\theta''\right)_{Z=h}=0 \cdots\cdots\cdots(17)$$

$$(\theta'')_{x=0}=f(Z)-(\theta')_{x=0}=F(Z) \cdots\cdots\cdots(18)$$

先ず$\theta'$を決めるためには

$$\theta'=AZ+B \cdots\cdots\cdots(19)$$

として之を境界條件(13)及び(14)式に代入すれば、A, Bは

$$A-\beta_0 B=-\beta_0\theta_0$$

$$A(1-h\beta_h)-\beta_h B=-\beta_h\theta_h$$

$$A=-\frac{\beta_0\beta_h(\theta_h-\theta_0)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}\text{ ------------- }(20)$$

$$B=-\frac{\beta_0(\theta_h-\theta_0)(1-h\beta_h)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}+\theta_h\text{ ····· }(21)$$

で与えられる。 故に

$$\theta'=-\frac{\beta_0\beta_h(\theta_h-\theta_0)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}Z-\frac{\beta_0(\theta_h-\theta_0)(1-h\beta_h)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}+\theta_h\text{ ------- }(22)$$

次に $\theta''$ を求めるには、$\theta''$ の特解として

$$\theta''=e^{-\frac{k_m\alpha^2}{\rho c U_m}x}(A_\alpha\cos\alpha Z+B_\alpha\sin\alpha Z)\text{ -------- }(23)$$

とする。 之を(16)，(17)の両式に代入すれば

$$\alpha B_\alpha-\beta_0 A_\alpha=0\text{ --------- }(24)$$

$$\alpha(-A_\alpha\sin\alpha h+B_\alpha\cos\alpha h)-\beta_h(A_\alpha\cos\alpha h+B_\alpha\sin\alpha h)=0\text{ -------- }(25)$$

(24)式より $\alpha B_\alpha=\beta_0 A_\alpha$

$$\frac{B_\alpha}{\beta_0}=\frac{A_\alpha}{\alpha}=\gamma$$

之を(25)式に代入すれば

$$\alpha(-\alpha\sin\alpha h+\beta_0\cos\alpha h)-\beta_h(\alpha\cos\alpha h+\beta_0\sin\alpha h)=0$$

$$(\alpha\beta_0-\alpha\beta_h)\cos\alpha h-(\alpha^2+\beta_0\beta_h)\sin\alpha h=0$$

$$\tan\alpha h=\frac{\alpha(\beta_0-\beta_h)}{\alpha^2+\beta_0\beta_h}\text{ ------- }(26)$$

$$\alpha h=\xi\text{ ------------ }(27)$$

とすれば

$$\tan\xi=\frac{\xi h(\beta_0-\beta_h)}{\xi^2+h^2\beta_0\beta_h}\text{ ---------- }(28)$$

この式のS番目の根を $\mu_s$ とすれば

$$\alpha h=\mu_s\text{ -------- }(29)$$

$$B_\alpha=\frac{\beta_0}{\alpha}A_\alpha=\frac{\beta_0 h}{\mu}A_\alpha\text{ ---------- }(30)$$

之を(23)式に代入すれば

$$\theta''=\sum_{S=1}^{\infty}A_s e^{-\frac{k_m\mu_s^2}{\rho c U_m h^2}x}\left(\cos\frac{\mu_s}{h}Z+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{h}Z\right)\text{ ------- }(31)$$

初期條件(18)式より

$$F(Z)=\sum_{S=1}^{\infty}A_s\left(\cos\frac{\mu_s}{h}Z+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{h}Z\right)\text{--------}(32)$$

であるので、この(32)式を満足する様に $A_s$ を定めればよい。

簡單のために

$$X_s=\cos\frac{\mu_s}{h}Z+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}\sin\frac{\mu_s}{h}Z\text{-----------}(33)$$

として、(32)式の両辺に $X_n$を乗じて0から$h$まで積分すれば

$$\int_0^h F(Z)X_n dZ=\sum_{S=1}^{\infty}A_s\int_0^h X_s X_n dZ\text{---------}(34)$$

$S\neq n$の時は

$$\int_0^h X_s X_n dZ=0$$

$S=n$の時は

$$\int_0^h X_s X_n dZ=\int_0^h X_n^2 dZ$$

となり、(15)式に(31)及び(30)の両式の値を代入すれば、

$$\frac{d^2X_n}{dZ^2}+\frac{\mu_n^2}{h^2}X_n=0$$

この式に $X_n$を乗じて0から$h$まで積分すれば、

$$\frac{\mu_n^2}{h^2}\int_0^h X_n^2 dZ=-\int_0^h X_n\frac{d^2X_n}{dZ^2}dZ$$

$$=-\left[X_n\frac{dX_n}{dZ}\right]_0^h+\int_0^h\left(\frac{dX_n}{dZ}\right)^2 dZ\text{--------}(35)$$

然るに

$$\frac{\mu_n}{h}X_n=\frac{\mu_n}{h}\cos\frac{\mu_n}{h}Z+\beta_0\sin\frac{\mu_n}{h}Z\text{--------}(36)$$

$$\frac{dX_n}{dZ}=-\frac{\mu_n}{h}\sin\frac{\mu_n}{h}Z+\beta_0\cos\frac{\mu_n}{h}Z\text{--------}(37)$$

であるから、之等二式を自乗して加えて0から$h$まで積分すれば

$$\frac{\mu_n^2}{h^2}\int_0^h X_n^2 dZ+\int_0^h\left(\frac{dX_n}{dZ}\right)^2 dZ=\left(\frac{\mu_n^2}{h^2}+\beta_0^2\right)h\text{---------}(38)$$

を得る。 (35)式とこの式より

$\int_0^h\left(\frac{dX_n}{dZ}\right)^2 dZ$ を消去すれば

$$2\frac{\mu_n^2}{h^2}\int_0^h X_n^2 dZ=\left(\frac{\mu_n^2}{h^2}+\beta_0^2\right)h-\left[X_n\frac{dX_n}{dZ}\right]_0^h\text{----------}(39)$$

(16)及び(17)の両式より

$$\left(X_n \frac{dX_n}{dZ}\right)_{Z=0} = \beta_0 (X_n^2)_{Z=0} \text{ - - - - - - - - } (40)$$

$$\left(X_n \frac{dX_n}{dZ}\right)_{Z=h} = \beta_h (X_n^2)_{Z=h} \text{ - - - - - - - - } (41)$$

(36)及び(37)の両式を自乗して加えた式に(40)及び(41)の両式の値を代入すれば

$$\left(\frac{M_n^2}{h^2} + \beta_0^2\right)(X_n^2)_{Z=0} = \frac{M_n^2}{h^2} + \beta_0^2$$

故に $(X_n^2)_{Z=0} = 1$ - - - - - - - (42)

$$\left(\frac{M_n^2}{h^2} + \beta_h^2\right)(X_n^2)_{Z=h} = \frac{M_n^2}{h^2} + \beta_0^2$$

故に $(X_n^2)_{Z=h} = \dfrac{M_n^2/h^2 + \beta_0^2}{M_n^2/h^2 + \beta_h^2} = \dfrac{M_n^2 + \beta_0^2 h^2}{M_n^2 + \beta_h^2 h^2}$ - - - - - - - - - - - (43)

が得られる。 之等を(40)及び(41)の両式に代入したものを(39)式に代入すれば

$$2\frac{M_n^2}{h^2}\int_0^h X_n^2\, dZ = \left(\frac{M_n^2}{h^2} + \beta_0^2\right)h - \left(\frac{M_n^2 + \beta_0^2 h^2}{M_n^2 + \beta_h^2 h^2}\beta_h - \beta_0\right) \text{ - - - - - - - - } (44)$$

となり、之より $\int_0^h X_n^2 dZ$ が計算出来る。 故に(44)式より係数 $A_n$ は(34)式より

$$A_n = \frac{\int_0^h F(\lambda)\left(\cos\frac{M_n}{h}\lambda + \frac{\beta_0 h}{M_n}\sin\frac{M_n}{h}\lambda\right)d\lambda}{\frac{h^2}{2M_n^2}\left[\left(\frac{M_n^2}{h^2} + \beta_0^2\right)h - \left(\frac{M_n^2 + \beta_0^2 h^2}{M_n^2 + \beta_h^2 h^2}\beta_h - \beta_0\right)\right]} \text{ - - - - - - - - - - } (45)$$

この $A_n$ の値を(31)式に代入すれば

$$\theta'' = \frac{2}{h^2}\sum_{S=1}^{\infty} e^{-\frac{k_m M_s^2}{\rho c u_m h^2}x} \frac{M_s^2\left(\cos\frac{M_s}{h}Z + \frac{\beta_0 h}{M_s}\sin\frac{M_s}{h}Z\right)}{\left(\frac{M_s^2}{h^2} + \beta_0^2\right)h - \left(\frac{M_s^2 + \beta_0^2 h^2}{M_s^2 + \beta_h^2 h^2}\beta_h - \beta_0\right)}$$

$$\times \int_0^h F(\lambda)\left(\cos\frac{M_s}{h}\lambda + \frac{\beta_0 h}{M_s}\sin\frac{M_s}{h}\lambda\right)d\lambda$$

$$= \frac{2}{h}\sum_{S=1}^{\infty} e^{-\frac{k_m M_s^2}{\rho c u_m h^2}x} \frac{M_s\cos\frac{M_s}{h}Z + \beta_0 h\sin\frac{M_s}{h}Z}{\left(M_s^2 + \beta_0^2 h^2\right) - \left(\frac{M_s^2 + \beta_0^2 h^2}{M_s^2 + \beta_h^2 h^2}\beta_h - \beta_0\right)h}$$

$$\times \int_0^h F(\lambda)\left(M_s\cos\frac{M_s}{h}\lambda + \beta_0 h\sin\frac{M_s}{h}\lambda\right)d\lambda \text{ - - - - - - - - - - } (46)$$

故に$\theta$は(22)及び(46)の両式より

$$\theta=\theta'+\theta''$$

$$=-\frac{\beta_0\beta_h(\theta_h-\theta_0)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}z-\frac{\beta_0(\theta_h-\theta_0)(1-h\beta_h)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}+\theta_h$$

$$+\frac{2}{h}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\frac{k_m\mu_s^2}{\rho c u_m h^2}x}\frac{\mu_s\cos\frac{\mu_s}{h}z+\beta_0 h\sin\frac{\mu_s}{h}z}{(\mu_s^2+\beta_0^2h^2)-\left(\frac{\mu_s^2+\beta_0^2h^2}{\mu_s^2+\beta_h^2h^2}\beta_h-\beta_0\right)h}$$

$$\times\int_0^h F(\lambda)\left(\mu_s\cos\frac{\mu_s}{h}\lambda+\beta_0 h\sin\frac{\mu_s}{h}\lambda\right)d\lambda \text{ ------------- } (47)$$

由って$\theta$の水深全体に亘る平均値$\theta_m$は

$$\theta_m=\frac{1}{h}\int_0^h\theta\,dz$$

$$=-\frac{h\beta_0\beta_h(\theta_h-\theta_0)}{2[\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h]}-\frac{\beta_0(\theta_h-\theta_0)(1-h\beta_h)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}+\theta_h$$

$$+2\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\frac{k_m\mu_s^2}{\rho c u_m h^2}x}\frac{\sin\mu_s-\frac{\beta_0 h}{\mu_s}\cos\mu_s+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}}{(\mu_s^2+\beta_0^2h^2)-\left(\frac{\mu_s^2+\beta_0^2h^2}{\mu_s^2+\beta_h^2h^2}\beta_h-\beta_0\right)h}$$

$$\times\int_0^h F(\lambda)\left(\mu_s\cos\frac{\mu_s}{h}\lambda+\beta_0 h\sin\frac{\mu_s}{h}\lambda\right)d\lambda \text{ ---------- } (48)$$

今特別な場合として　$F(\lambda)=\theta_a=$ 常数とすると、(47)式は

$$\theta=-\frac{\beta_0\beta_h(\theta_h-\theta_0)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}z-\frac{\beta_0(\theta_h-\theta_0)(1-h\beta_h)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}+\theta_h$$

$$+2\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\frac{k_m\mu_s^2}{\rho c u_m h^2}x}\frac{\mu_s\cos\frac{\mu_s}{h}z+\beta_0 h\sin\frac{\mu_s}{h}z}{(\mu_s^2+\beta_0^2h^2)-\left(\frac{\mu_s^2+\beta_0^2h^2}{\mu_s^2+\beta_h^2h^2}\beta_h-\beta_0\right)h}$$

$$\times\theta_a\left[\sin\mu_s+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}(1-\cos\mu_s)\right] \text{ -------- } (49)$$

となり，(48)式は

$$\Theta m=-\frac{h\beta_0\beta_h(\Theta_h-\Theta_0)}{2\{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}-\frac{\beta_0(\Theta_h-\Theta_0)(1-h\beta_h)}{\beta_0(1-h\beta_h)-\beta_h}+\Theta_h$$

$$+2\sum_{s=1}^{\infty}e^{-\frac{k_m\mu_s^2}{\rho c u_m h^2}x}\frac{\sin\mu_s-\frac{\beta_0 h}{\mu_s}\cos\mu_s+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}}{(\mu_s^2+\beta_0^2h^2)-\left(\frac{\mu_s^2+\beta_0^2h^2}{\mu_s^2+\beta_h^2h^2}\beta_h-\beta_0\right)h}$$

$$\times h\Theta a\left[\sin\mu_s+\frac{\beta_0 h}{\mu_s}(1-\cos\mu_s)\right]\cdots\cdots(50)$$

となる。

## 参考文献


(1) W. F. Durand : Aerodynamic Theory Vol. Ⅵ, Div. T "Aerodymamics of Cooling" by H. L. Dryden, p. 241

(2) 仝上 p. 241

(3) 永井荘七郎："流砂に関する研究（第2編）"，土木学会誌，第29巻第9号，654頁

(4) 細井正延："開水路乱流の流速分布及び摩擦抵抗について"，土木研究，第一輯，89・100・114頁

(5) 石原藤次郎、青松健一："管内乱流に於ける熱の移動とエネルギー輸送との類似について" 土木学会誌，第29巻第5号，387頁