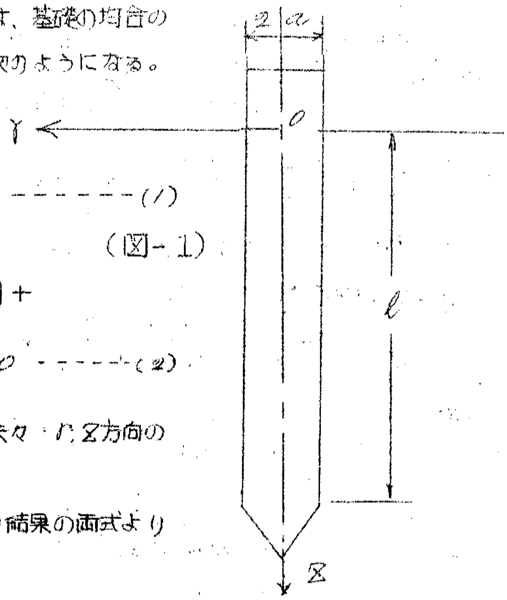
摩擦単杭の支持力の一計算法

金沢大学　　西田義親

要旨　杭の存在による影響を考えに入れて、均合の基礎式から境界条件を充すように解を求めた。但し土は一応弾性体とみなした。計算の結果によれば、摩擦支持力には杭長と杭径の比が関係してくることが分った。

1. 式の誘導

今地表面水平の半無限体の土中に杭が打ちこまれているものとする。図-1の如く地表面杭中心を原点とし、鉛直地中方向をZ軸にとる円筒座標を用いる。しかるときは、基礎の均合の微分方程式を変形で示すと，杭軸に関して対称の関係より次のようになる。



(図-1)

$$2(m-1)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\right\}+(m-2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+m\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=0 \quad \text{-------}(1)$$

$$m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+(m-2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+2(m-1)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\rho z=0 \quad \text{------}(2)$$

ここに，mは土のポアソン数，ρは土の密度，u, wは夫々r, z方向の変位である。

式-(1)及び，式-(2)を夫々z, r, で微分してその結果の両式より $\partial w/\partial r$ 又は $\partial u/\partial z$ を消去すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 y=0,\quad y=\frac{\partial u}{\partial z}\ \text{又は}\ \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{--------}(3)$$

この解は ※

$$y=\Sigma\left[A\cos(kz+\alpha)I_1+Cr\cos(kz+\gamma)I_0+Fz\cos(kz+\psi)I_1+B\cos(kz+\beta)K_1+Dr\cos(kz+\delta)K_0+Gz\cos(kz+\theta)K_1\right] \quad \text{----}(4)$$

ここに，A, B, C, D, F, G, α, β, γ, δ, ψ, θ, は積分常数で，I, K, I_0, K_0 は夫々kをパラメーターにし，rを変数とするベッセル函数で$I_1(kr)$, $K_1(kr)$, $I_0(kr)$, $K_0(kr)$ のことである。

さて杭から相当はなれた所では，杭による変形の影響は消失する筈である。従って $r\rightarrow\infty$ のときは，uは勿論 $\partial w/\partial r$ も 0 である。この実際の事情に適合さすためには

$$A=C=F=0 \quad \text{--------}(5)$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial z}=\Sigma\left[B\cos(kz+\beta)K_1+Dr\cos(kz+\delta)K_0+Gz\cos(kz+\theta)K_1\right] \quad \text{---}(6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\Sigma\left[B'\cos(kz+\beta')K_1+D'r\cos(kz+\delta')K_0+G'z\cos(kz+\theta')K_1\right] \quad \text{---}(7)$$

※　例えば，木村二郎：土木学会誌 17巻 8号，昭 6.8， P 717

所が土を彈性体とみなしているのに比べれば，杭は相当の剛度をもつ剛性体であると考える事ができる。従って今、杭を一様の太さと假定すると杭に接した所では $r=a$ の所では $\partial u/\partial z=0$ でなければならぬから，（a は杭の半径）

$$G = 0 \qquad \text{------(8)}$$

$$\beta = \delta \qquad \text{------(9)}$$

$$D = -\frac{B}{a}\frac{K_{1a}}{K_{0a}} \qquad \text{------(10)}$$

ここに K_{1a}, K_{0a} は $r=a$ のときの K_1, K_0, を意味する。式-(6)(7) に於て，u は z の偶函数，w は z の奇函数である性質より 次の如くならねばならない。

$$\beta=\beta'=\delta'=\pi/2 \quad ; \quad \theta'=0 \qquad \text{-------(11)}$$

この結果を用いて 式-(6).(7) を積分すると

$$u=f(r)+\Sigma\left[BK_1\frac{1}{k}\cos kz-\frac{B}{a}\frac{K_{1a}}{K_{0a}}rK_{0a}\frac{1}{k}\cos kz\right] \text{---(12)}$$

$$w=g(z)+\Sigma\left[B'K_0\frac{1}{k}\sin kz-D'rK_1\frac{1}{k}\sin kz-G'z\cos kz\frac{1}{k}K_0\right] \text{-----(13)}$$

さて変形 u, w, が求まれば，土の中の r, t, z, 方向の垂直応力は次式であたえられる。但し E は土の彈性常数である。

$$\sigma_r=\frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad \text{------(14)}$$

$$\sigma_t=\frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}\frac{u}{r} \qquad \text{------(15)}$$

$$\sigma_z=\frac{mE}{(m+1)(m-2)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)+\frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \text{-----(16)}$$

今杭が打ちこまれるとその結果，土に力を及すわけであるが，一般に土の粘着力を無視するときは，土の中に生じる最大主応力 σ_I と 最小主応力 σ_{III} との比は一定の値（$m-1$）を超過し得ないのである。従って土が側方に圧せられて滑り破壊をした場合には

$$\sigma_I=(m-1)\,\sigma_{III} \qquad \text{但し } m=2/1-\sin\varphi \qquad \text{-----(17)}$$

φ は土の内部摩擦角

とおくと，次の二つの式の何れかが土の内部の三つの主応力 σ_I, σ_{II}, σ_{III} の間に成立しなければならない。

$$\sigma_I=\sigma_{III} \qquad \text{又は} \qquad \sigma_{II}=\sigma_{III} \qquad \text{-----(18)}$$

そして σ_I（又 σ_{III} も）は rz の面内に生じるものと考えられるから，之等を土の滑り破壊の條件式により σ_r, σ_z τ, で表わすと

$$\sigma_I'=\frac{Em(m-1)}{(m+1)(m-2)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2(m-1)E}{(m+1)(m-2)}\frac{u}{r} \qquad \text{------(19)}$$

$$\sigma_{II}=\frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{2E}{(m+1)(m-2)}\frac{u}{r} \qquad \text{---(20)}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_t = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}\frac{u}{r} \quad \text{----(21)}$$

$r \to \infty$ では $u \to 0$, $\frac{\partial u}{\partial r} \to 0$ が初めから成立しているから，今若し $\sigma_{II} = \sigma_{I}$ とすると $r \to \infty$ で $\partial w/\partial z = 0$ となる。之は不合理であるから，式(18)に於ては，

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} \qquad \therefore \quad u = 0 \quad \text{----(22)}$$

従って

$$f(r) = 0 \quad (23)$$

$$B = 0 \quad (24)$$

次に $r \to \infty$ における鉛直方向の変形と自重との関係を考えてその結果

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \rho z \frac{(m-2)(m+1)}{Em(m-1)} \quad (25)$$

次に地表では応力が何等作用しないわけであるから，$z = 0$ で $\tau = 0$ 及び $\sigma_z = 0$ でなければならない。

$$\therefore \quad D' = 0 \quad (26)$$

$$B' = \frac{1}{k} G' \quad (27)$$

以上の結果を整理して応力を示す式を書くと

$$\tau = \frac{1}{2}\frac{mE}{m+1}\sum G' K_1 \left(z \cos kz - \frac{1}{k}\sin kz\right) \quad (28)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{m-1}\rho z + \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\sum G' z \sin kz \, K_0 \quad (29)$$

以上に於て未決定の係数は G' である。一般に杭の表面では $\tau/\sigma_r \doteqdot \mu$ （但し μ は杭と土との摩擦係数）である。$\tau = \mu\sigma_r$ が杭表面の何れの点にて成立しているかは予想しがたいのであるが，杭が圧入するときは尖端で土を側方に圧して排除するわけであるから，假に $z = l$ （杭軸に平行な杭周面の最深部）で $\tau = \mu\sigma_r$ という関係が成立していると假定すると更にもう一つの條件を得て係数が全て決まる。このために式(29)の右辺の第一項をフーリエ級数に展開すれば

$$\sigma_r = \sum_{0}\left[\frac{8\rho l}{\pi^2}\frac{1}{m-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}z + \frac{mE}{(m+1)(m-2)}G' K_0 z \sin kz\right] \text{--(30)}$$

上にのべた関係より

$$G' = -\frac{m+1}{m(m-1)}\frac{1}{E}\frac{\mu \frac{8}{\pi^2}\frac{\rho(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{1}{K_{0a}}}{\left\{\frac{K_{1a}}{K_{0a}}\frac{1}{(2n+1)\pi} + \frac{\mu}{(m-2)}\right\}} \quad \text{----(31)}$$

但 $k = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}$

以上の結果から土の中の応力分布は全て計算して求めることができる。

杭の摩擦支持力としては

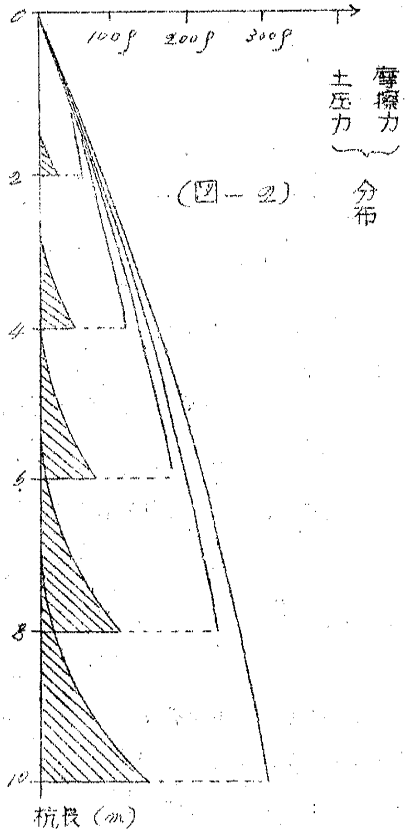
$$T = 2\pi a \int_0^l |\tau|_{r=a}\, dz$$

$$= 2\pi a \ell^{2}\,\frac{\rho\mu}{m-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{\dfrac{8}{\pi^{2}}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)^{2}}\cdot\dfrac{K_{1}a}{K_{0}a}}{\left\{\dfrac{K_{1}a}{K_{0}a}\dfrac{1}{(2n+1)}\cdot\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\mu}{m-2}\right\}}\left\{\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)\pi}-\frac{4}{(2n+1)^{2}}\cdot\frac{1}{\pi^{2}}\right\} \quad \cdots(32)$$

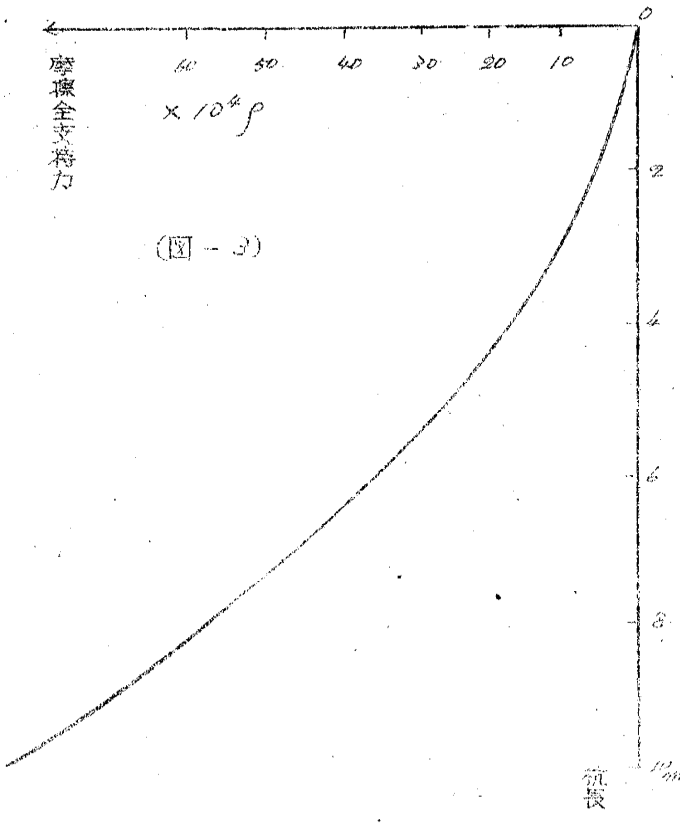
2　数値計算の例

一例として　$m=4$ ($\phi=30°$)，$\mu=0.5$ として計算した結果を図に示す。図−2は、直径 $2a=20$ cm の杭の周りの表面に作用する摩擦力と土圧力の分布を示している。（斜線は摩擦応力）。　一般には土圧は水圧のように直線的に増加して分布すると仮定するが、含水率の少い地盤では、或る深さ以上は一定である梯形分布とした方がより妥当だと称せられている。※　図−2に於ては，深くなると土圧が幾分かカーブしてゆく傾向を示している。

図−3は杭径 20 cm で杭長を増加していった時の摩擦全支持力を示す。杭の短い間は曲線的に増加するが、杭が長くなると直線的増加に近くなる。



(図−2)

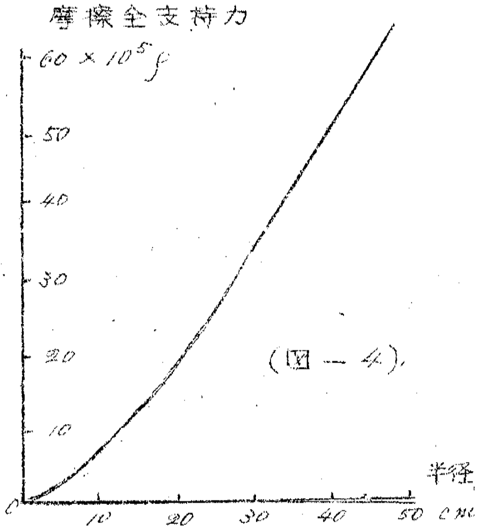


(図−3)

図−4は杭長を 10 m として直径を変化させたときの摩擦全支持力を示す。直径が大くなると支持力が増加するのは当然であるが，図が直径の増大に比例せず，曲線的に支持力が増大することを示しているから，細い杭を何本も用いるより，同じ周辺面積の太い杭を用いた方が有利である。然しながらいろいろの他の條件に制約されるから，図より判断して曲線のカーブする点と思われる大凡直径 30 cm 位の所が妥当ではないかと考えられる。

3、結 言

以上は、たゞ、摩擦による支持力のみをとりあげて、論じたが、実際問題としては尖端支持力の影響が入ってくるから問題は更に複雑になる。然しながら上述の検討により従来の公式 例えば Dörr の公式※であたえる摩擦支持力にはかなりの安全率を見こまないと危険ではないかと思われる。



(図―4)

※ 例えば 桑口、米田 ; 土と杭の工学 昭26, P 169.