Lagrangeの方法による新しい波———Nouvelle Vague

伸東測量設計株式会社　　正会員　山田雄三

1はじめに

１８０２年にGerstnerがLagrangeの方法を用いて深海波を見出して以降、Rankine等も独立に同じ結果に到達した。

また、楕円トロコイド波がGaillardにより提唱された。

著者は、有限水深において、水粒子が円運動をし、連続方程式および運動方程式を厳密に満足する波を提唱するものである。

2　水粒子の軌道

水平床上にX軸、鉛直上方向にY軸を置く。

このような座標系に対して、波速ｃ、波数ｋ（=L/２π）を使って

$x = a - b \sinh r \sin(a-ct)/k$　　①

$y = b \cosh r + b \sinh r \cos(a-ct)/k$　　②

で表される水粒子の運動を考える。

ここに、$\frac{b}{k}\sinh r \exp(\frac{b}{k}\cosh r) = C_0$、$C_0$は与えられた波によって

決まる定数である。　　③

ただし、a,bは水粒子１つの実質部分を表すパラメータであり、

ｒは式③を満足するｂの関数である。

3　連続方程式を満足すること

式③の両辺の対数をとり、ｂについて微分し整理すると

$(\sinh r - (b/k)\sinh r \cosh r) + (dr/db)(b\cosh r - (b*b/k)\sinh r * \sinh r) = 0$　④

となるから、　$\frac{d}{dt}\frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} = 0$

連絡先：〒262-0019　千葉県千葉市花見川区朝日ヶ丘一丁目７番２０号
℡090-8948-0175　　Email: rsj61434@nifty.com

4　Lagrange の運動方程式を満足すること

運動方程式の次の項を、式④を考慮して計算すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial y}{\partial a}=b\left(\frac{c}{k}\right)^2 \mathrm{sinh\ r\ sin(a—ct)/k}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{c^2}{k}(\frac{b^2}{2k}sinh^2\mathrm{r}\ \ +\mathrm{b\ sinhr\ cos(a-ct)/k)}$$

となるから、運動方程式は

$$\mathrm{d}(\frac{p}{\rho}+gy)=\frac{c^2}{k}d(\frac{b^2}{2k}sinh^2r\quad +\mathrm{b\ sinhr\ cos(a-ct)/k)} \qquad ⑤$$

となる。この式の y に②式を代入し積分すると

$$\frac{p}{\rho}+\mathrm{g\ b\ coshr+g\ b\ sinhr\ cos(a-ct)/k}-\frac{b^2c^2}{2k^2}sinh^2r$$

$$-\frac{bc^2}{k}sinhr\ \mathrm{cos(a-ct)/k}=一定$$

となる。

5　波速および圧力の算定

水面（ｂ＝ｈ）において大気圧はａにかかわらず一定であるから

$$\mathrm{g\ h\ sinhr}=\frac{hc^2}{k}\mathrm{sinhr}\quad より波速 c は\quad c=\sqrt{gK}$$

そのとき圧力は　$\frac{p}{\rho}+\mathrm{g\ h\ coshr}-\frac{h^2g}{2k}sinh^2r=一定$

となる。

6　おわりに

規則波の波形および水粒子の流速などの測定値で、Nouvelle Vague の値を検証したい。