

## IGAに基づく曲線はり要素への膜ロッキング回避策の適用

日本大学大学院 学生会員 ○唐澤 奈央子  
日本大学 正会員 長谷部 寛

## 1. はじめに

構造物の設計プロセスにおいて、多くの場合形状検討過程と力学的検討過程が分離している。このことが、形状自由度の低下につながる1つの要因であると考えている。これに対して Isogeometric Analysis (IGA)<sup>1)</sup> は、CADの形状表現に用いられるスプライン関数 (NURBS 等) を FEMの近似関数の基底関数に用いるため CADとの親和性が高く、CAD上で解析結果を得ることが可能である。そのため、構造物の形状検討段階において IGA を用いれば、より合理的な形状決定の実現と形状自由度の向上が期待できると考える。

IGA は FEM 同様、様々な要素が用いられるが、著者は細長い部材の解析を対象とし、平面曲線に対するベルヌーイ・オイラーはり要素を構築した<sup>2)</sup>。しかし、はり高を小さくするとロッキングが生じた。IGA に基づくベルヌーイ・オイラーはり要素はいくつか提案されているが、平面曲線に対する NURBS 基底のベルヌーイ・オイラーはり要素<sup>3), 4)</sup>のうち、薄い断面の曲線要素で問題となる膜ロッキングに対してロッキング回避策 $\bar{B}$ 投影法<sup>5)</sup>を適用した事例は見つかっていない。そこで本研究は、これまでに構築した未知変数を変位のみで構成する IGA に基づくベルヌーイ・オイラーはり要素に対してさらに $\bar{B}$ 投影法を適用した上で要素性能を評価した。

## 2. NURBS 曲線と基底関数

式(1)に示す NURBS 曲線は式(2)に示す NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ とコントロールポイントの位置ベクトル $\mathbf{B}_i$ の線形結合で表される。

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (1)$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_i^p(\xi) w_i}{\sum_a N_a^p(\xi) w_a} \quad (2)$$

ここで、 $\xi$ はパラメータ空間の座標、 $w_i$ はコントロールポイントにおける重み、 $p$ は基底関数の次数、 $n$ はコントロールポイント数、 $N_i^p(\xi)$ は B-Spline 基底関数と呼ばれる再帰的な関数であり、 $p=0$ の場合式(3a)、

$p \geq 1$ の場合式(3b)で表される。

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3a)$$

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \quad (3b)$$

ここで、 $\xi_i$ はノットと呼ばれるパラメータであり、IGA では要素の境界を表す局所座標値である。

## 3. 支配方程式と離散化式

支配方程式には Kirchhoff 仮定を適用した平衡方程式 (式(4)) を用い、ひずみと力の関係には線形弾性を仮定して式(5)を用いた。また、ひずみは断面内でひずみが線形分布することを仮定する式(6)を用いた。ここで、ベルヌーイ・オイラーの仮定によりたわみ角を変位と曲率により置き換えることができる。ここまですべて、式(5)、(6)を式(4)に代入、部分積分し、ベルヌーイ・オイラーの仮定を適用すると仮想仕事の原理 (式(7)) が導かれる<sup>6)</sup>。また、離散化式には NURBS が $C^{p-1}$ 連続であるため未知変数にたわみ角を含まず式(8)のように構成し、Galerkin 法に基づく有限要素法で離散化した。

$$N' - kV + q_t = 0, V' + kN + q_n = 0, M' + V + q_\theta = 0 \quad (4)$$

$$N = \varepsilon EA, \quad M = \kappa EI \quad (5)$$

$$\varepsilon = u_t' + \kappa u_n, \quad \kappa = \theta', \quad \theta = -u_n' + \kappa u_t \quad (6)$$

$$\int_0^L (\varepsilon^* N + \kappa^* M) ds = \int_0^L (u_t^* q_t + u_n^* q_n + \theta^* q_\theta) ds + [u^* \bar{N} + v^* \bar{V} + \theta^* \bar{M}]_r \quad (7)$$

$$u_t(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} R_i^p(\xi) u_{t_i}, \quad u_n(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} R_i^p(\xi) u_{n_i} \quad (8)$$

ここで、 $N$ は軸力、 $V$ はせん断力、 $M$ は曲げモーメント、 $k$ は曲率、 $q_t$ は接線方向の分布荷重、 $q_n$ は法線方向の分布荷重、 $q_\theta$ はモーメント分布荷重、 $(\cdot)'$ は弧長パラメータ $s$ による1階微分、 $\varepsilon$ は膜ひずみ、 $\kappa$ は曲げひずみ、 $E$ はヤング率、 $A$ は断面積、 $I$ は断面二次モーメント、 $u_t$ は接線方向変位、 $u_n$ は法線方向変位、 $\theta$ はたわみ角、 $L$ ははりの長さ、 $(\cdot)^*$ は重み関数、 $(\bar{\cdot})$ は境界値、 $(\cdot)_i$ はコントロールポイント値である。

#### 4. B投影法

式(7)で示した仮想仕事の原理の膜ロッキングを生じさせる膜ひずみ $\varepsilon$ をBひずみ $\bar{\varepsilon}$ に置きかえることで、ロッキングを回避できる手法である。Bひずみ $\bar{\varepsilon}$ は式(10)で計算される。

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{A=1}^{\tilde{n}} \bar{R}_A^p \bar{\varepsilon}_A, \quad \bar{\varepsilon}_A = \sum_{B=1}^{\tilde{n}} \bar{M}_{AB}^{-1} \int_0^L \bar{R}_B^p \varepsilon ds, \\ \bar{M}_{AB} = \int_0^L \bar{R}_A^p \bar{R}_B^p ds \quad (10)$$

ここで、 $\tilde{n}$ は1次低いNURBS基底関数コントロールポイント数、 $\bar{R}_A^p$ は1次低いNURBS基底関数、 $\bar{M}_{AB}$ は質量マトリクスである。

#### 5. 水圧荷重が作用する1/4円弧はりの解析

##### 5.1 解析条件・解析ケース

解析モデルと境界条件を図1に示す。法線方向に水圧荷重 $q_n$ が作用する単純支持の1/4円弧はりを対象に解析を行った。ヤング率は $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 、断面は中実の長方形断面として、断面積 $A = 0.2 \text{m}^2$ を保持しつつはり高を $h = 0.1, 0.01, 0.001 \text{m}$ と低くした3ケースの断面を解析した。

解析メッシュは、NURBS基底関数の次数は3次、要素数は1, 2, 4, 8, 16要素で検討を行った。また、要素マトリクスの数値積分にはガウス求積法を用い、全ての解析ケースで積分点数を10点とした。B投影法の効果を検証するため、元の定式化との2種類の定式化で解析を行い、結果を比較した。

##### 5.2 B投影法の効果の検証

解析して得られた解を離散化式(式(8))に代入し、変位の関数を得た。そしてはり全体を90等分し、式(11)を用いて理論解との相対誤差を求めた。理論解との誤差は解の方向によらず同程度であったことから法線方向変位の結果を図2に示す。

$$\text{Relative error} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} \frac{(u_{n_i} - u_{n_i, \text{exact}})^2}{(u_{n_i, \text{exact}})^2}} \quad (11)$$

ここで、 $m$ は分割数(本研究では $m=90$ とした)、 $u_{n_i}$ は法線方向の変位、 $u_{n_i, \text{exact}}$ は法線方向変位のベルヌーイ・オイラーはり理論に基づく理論解である。

B投影法を適用した結果、全てのはり高で理論解との相対誤差が縮まった。そしてはり高によらず要素性能は一致し、相対誤差の減少の傾きは要素長の3乗から4乗の間であった。

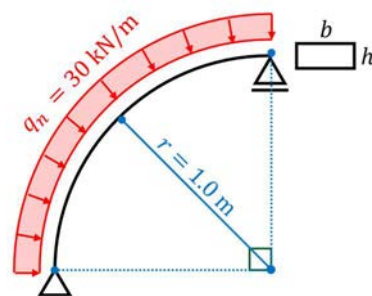


図1 解析対象

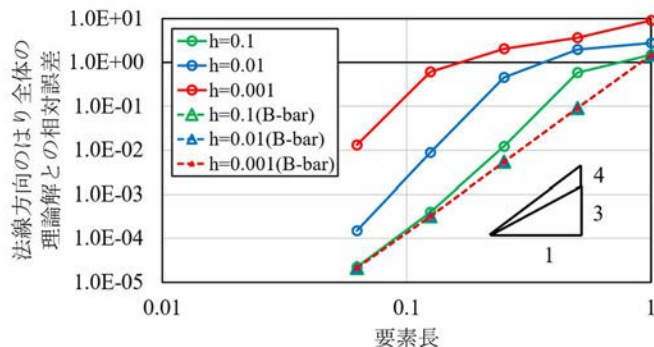


図2 B投影法を用いた場合の相対誤差

#### 6. まとめ

本研究は変位のみで未知変数を構成するIGAベルヌーイ・オイラーはり要素を構築し、膜ロッキング回避策としてB投影法を適用した。そして、1/4円弧はりの解析において元の定式化に比べて要素性能は向上し、はり高によらず要素性能は一致する結果が得られた。

#### 参考文献

- 1) J. A. Cottrell et al.: Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.
- 2) 唐澤ら: NURBS基底関数を用いた曲線ベルヌーイ・オイラーはり要素の構築, 土木学会論文集A2, 78巻2号, 2022. (掲載決定)
- 3) A. Bolcovic et al.: Rotation-free isogeometric analysis -, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 334, pp.238-267, 2018.
- 4) H. Casquero et al.: Removing membrane locking -, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 399, 115354, 2022.
- 5) T. Elguedj et al.: B and F projection methods -, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 197, pp.2732-2762, 2008.
- 6) V F. Armero et al.: Invariant Hermitian finite elements -, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 427-457, pp.213-216, 2012.