半無限弾性体を対象とした熱損失のある非定常熱伝導に関する周期解

千葉工業大学 学生会員 ○中澤 健太[*1]
千葉工業大学 正会員 内海 秀幸[*2]

1. はじめに

構造物の熱伝導や熱応力に関する評価には，各種のシミュレーションソフトが普及しており多様な形状や境界条件に対する解析が可能となっている．しかし，解析対象とする領域を半無限とする場合の取り扱いや動的な境界条件には一般的に対応していない．そこで本研究では，熱損失がある半無限熱伝導体に対する周期的な熱伝導周期厳密解を定式化し，その特性について吟味した．

2. 熱損失のある熱伝導方程式

熱損失のある1次元非定常熱伝導に対する支配方程式は次式のように表される[1)]．

$$\frac{dT}{dt}=\Omega\frac{d^2T}{dx^2}-\eta T \tag{1}$$

ここで， T は温度[℃] ，t は時間[sec]，x は空間[m]を示し，Ω と η はそれぞれ C を比熱[J/(kg ℃)]，ρ を密度[kg/m^3]，κ を熱伝導率[W/(m・℃)]，h を熱伝達率[W/(m^2・℃)]，e を媒体の厚さ[m]，l を幅[m]，A を断面積[m^2]として次式のように定義される．

$$\Omega=\frac{\kappa}{\rho c}\qquad \eta=\frac{h}{C\rho}\frac{2\ e+l}{A} \tag{2}$$

3. 境界条件と周期解

本研究では，図-1に示すような半無限媒体の表面(y-z 面)に周期的な温度変化が作用する場合を想定し，遠方無限では温度がゼロとなるものとして，次式の境界条件のもと式(1)を解く．

$$T=T_0\cos(\omega t)\quad at\quad x=0 \tag{3}$$

$$T=0\quad at\quad x=\infty \tag{4}$$

ここで，T_0 は温度振幅[℃]，ω は角速度[rad/s]である．これら境界条件を充足する解は次式のように表される．

$$T=T_0\exp[-bx]\exp[-i\omega t] \tag{5}$$

ただし，b は p と q を実数，i を虚数として

$$b=p+qi \tag{6}$$

である．式(5)を式(1)に導入すると次式の恒等式を得る．

$$-i\omega=\Omega b^2-\eta \tag{7}$$

すなわち

$$b^2=\frac{\eta}{\Omega}-\frac{i\omega}{\Omega} \tag{8}$$

なる関係が成立する．さらに，式(6)を式(8)に導入すると

$$p^2+2pqi-q^2=\frac{\eta}{\Omega}-\frac{i\omega}{\Omega} \tag{9}$$

であり，虚数の演算であることに注意すれば

$$p^2-q^2=\frac{\eta}{\Omega}\quad ,\quad 2pq=-\frac{\omega}{\Omega} \tag{10}$$

なる関係が成立する．式(10)より，p と q はそれぞれ4つの解を有するが，実数であること，また境界条件である式(4)を充足する観点から，次式が選択される．

$$\begin{cases} p=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}\qquad q=-\dfrac{\omega}{\sqrt{2}\beta\Omega} \\ \beta=\sqrt{\dfrac{\sqrt{\eta^2+\omega^2}+\eta}{\Omega}} \end{cases} \tag{11}$$

式(5)に式(11)を導入すると

$$T=T_0\exp\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)\exp(-i(\omega t-\frac{\omega}{\sqrt{2}\beta\Omega}x)) \tag{12}$$

となり，式(12)のうち工学的に利用する解は次式の実数解である．

$$T=T_0\exp\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{\sqrt{2}\beta\Omega}x\right) \tag{13}$$

4. 熱伝達にかかわるパラメータηの設定に関する検討

本研究では，最終的に平面応力状態に対応する半無限媒体の非定常熱応力に関する解析解の導出を目指している．しかしながら，式(2)で定義される熱伝達にかかわるパラメータ η の設定に際しては，解析対象とする媒体に対して有限な断面の大きさを設定する必要がある．そこで，半無限媒体でかつ平面応力状態の仮定を充足しうる η の設定を検討することを目的として，e=0.01[m]と固定し，l/e と η の関係を図-2に示した．なお，ここでは典型的な鋼材を想定しており，用いた物性値を表-1に示す．

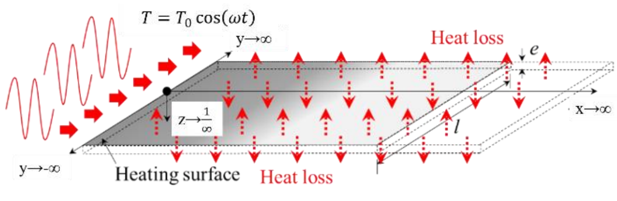

図-1 熱損失がある半無限弾性体の模式図

キーワード：非定常熱伝導，熱分布，熱損失，解析解

*1 千葉工業大学 大学院創造工学研究科 都市環境工学専攻 〒275-0016 千葉県習志野市津田沼 2-17-1
*2 千葉工業大学教授 創造工学部 都市環境工学科 工博 (正会員) 〒275-0016 千葉県習志野市津田沼 2-17-1

表-1 典型的な鋼材の物性値

熱伝導率	κ	80	[J/(m・s・K)]
密度	ρ	7.84E+03	[kg/m^3]
比熱	C	5.22E+02	[J/(kg・K)]

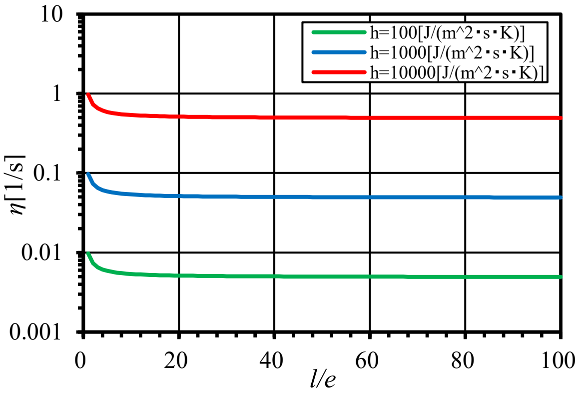

図-2 l/e と η の関係 (e=0.01[m])

図-2 より，各熱伝達率 h ともに概ね l/e=20 以上であれば η の値はほぼ一定となり，半無限媒体でかつ平面応力状態としての設定を解析解に反映する上で，本研究では e=0.01[m]において l/e=20 となるよう l=0.2[m]として設定することとした．

5. 解析例

5.1 熱損失の有無による温度分布の比較

表面に作用する温度変化の周期を6[hour]とし，位相原点でT_0が作用する条件下に相当するt=0[hour]での解析例を図-3に示す．図-3における，青の実線は式(13)を用いて計算した結果，赤の実線は特に熱損失項ηをゼロとした解析結果であり拡散方程式に対する周期解に相当する．なお，半無限媒体の物性は4章と同様に鋼材を想定しており，表-1に示した数値を用いている．なお，熱伝達率hは半無限媒体の周囲に水が存在するものとしてh=405[W/(m^2・℃)]とした．

図-3より，熱損失項を無視した結果ではx=0.6[m]程度までは正の温度となっており，x=0.6[m]から1.5[m]程度では負の値を取り，x=1.5[m]程度になると温度はほぼゼロとなっている．これは周期的な解析解の特徴であり，その時間前後の温度分布の特性を反映していることに由来している．一方，熱損失項を考慮している式(13)の結果では(青の実践)，表面近傍から急激に温度が減少する傾向がみられ，x=0.2[m]程度でゼロとなっている．

5.2 周期毎の温度分布の様子

5.1節と同じ条件のもと，各時間における半無限媒体内部の温度分布について図-4に示す．

図-4では，入力される温度の周期的な変化に合わせて半無限媒体内部の温度分布が変化する様子が確認できる．なお，t=0[h]は図-3における熱損失がある場合の半無限弾性体内部の温度分布と同じ条件である．

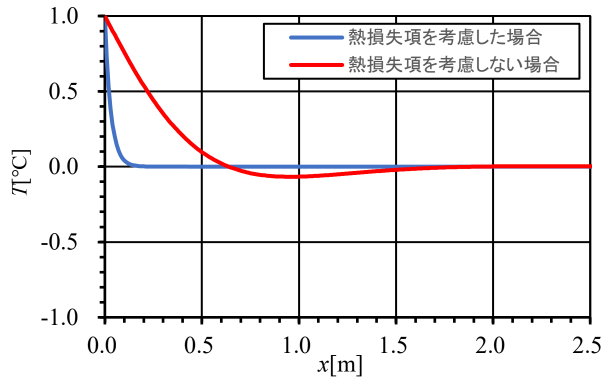

図-3 熱損失項を考慮した場合と考慮しない場合の温度分布

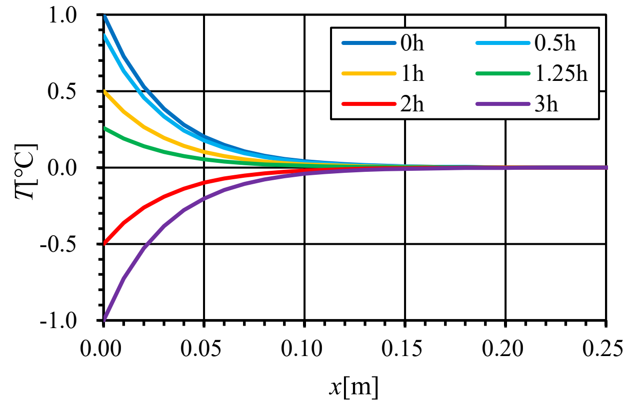

図-4 各時間における温度分布(周期6時間)

いずれの場合においても温度変化は急速に収束し，x=0.15[m]程度でゼロとなっていることが確認できる．

6. まとめ

1 次元非定常熱伝導の支配方程式より，熱損失を含む半無限媒体に対する熱伝導周期厳密解を定式化し，半無限媒体でかつ平面応力状態での取り扱いを想定した解析例を示した．今後，本研究をもとに動的な温度変化に応じて半無限弾性体に生じる平面応力状態での非定常熱応力解析へ展開する予定である．

7. 参考文献

1) 一色 尚次，北山 直方：伝熱工学 新装第 2 版，森北出版，2018，pp.36,50-52
2) Shigeyasu Okusa, A Periodic Solution of Two-dimensional Diffusion Eduation, F.Fac.Mar.Sci.Technol., Tokai Univ., No. 15, pp. 151-154(1982)
3) Shoitiro HAYAMI , Shigeyasu Okusa, A Contribution to the Theory of Coastal Ground Water,, F.Fac.Mar.Sci.Technol., Tokai Univ., No. 7, pp. 203-214(1973)
4) Shoitiro HAYAMI , Shigeyasu OGUSA, Contribution to the Theory of Coastal Ground Water, SOILS AND FOUNDATION, vol.14, No.3, 1974, pp.41