

## IGA を用いた 3 次元円管路流れの解析

中央大学大学院 学生会員 ○ 安井 太一 日本大学 正会員 長谷部 寛  
中央大学 正会員 檜山 和男

## 1. はじめに

IGA (Isogeometric Analysis)<sup>1)</sup> は医療分野, 自動車や精密機械の分野の数値解析において, 近年盛んに研究と適用が行われている手法である. IGA は CAD (Computer Aided Design) の形状表現に用いられる Spline 関数を基底関数として用いるため, CAD で描いた形状モデルから形状誤差なく領域を表現することができる.

著者らはこれまで, IGA を用いた流体-構造連成解析手法の構築を目的とし, その基礎的検討として IGA を用いた 2 次元流れ問題について研究を行ってきた<sup>2)</sup>. 本報告ではその発展として, 3 次元非圧縮性粘性流れのベンチマーク問題に対して NURBS 関数を用いた IGA を適用して解析を行った.

## 2. 数値解析手法

## (1) 支配方程式

非圧縮性粘性流体の支配方程式には, 以下に示す無次元化した Navier-Stokes の運動方程式と連続式を用いる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件はそれぞれ以下のように表される.

$$u_i = g_i \quad \text{in } \Gamma_g \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) n_j = h_i \quad \text{in } \Gamma_h \quad (4)$$

ここで,  $\Gamma_g, \Gamma_h$  は, Dirichlet 境界条件, Neumann 境界条件を表し,  $g_i, h_i$  はそれぞれの境界上で規定される流速とトラクションである. また  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ,  $n_i$  は外向き単位法線ベクトルである.

支配方程式 (1), (2) に対し, 空間方向の離散化に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い補関数に NURBS 関数を用いる. 時間方向の離散化手法として, 流速に対して二次精度である Crank-Nicolson 法を適用し, 連続項の流速と圧力に関しては陰的に取り扱う. 移流速度  $\bar{\mathbf{u}}_i$  は, 式 (5) に示す 2 次精度の Adams-Bashforth 法により陽的に近似を行い, 線形化する.

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{3}{2} \mathbf{u}_i^n - \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^{n-1} \quad (5)$$

以上により式 (6) に示すような有限要素方程式を得る.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{M}_S) \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + (\mathbf{A} + \mathbf{A}_S) \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) \\ & - (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{Si}) \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{D}_{ij} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) \\ & + \mathbf{C}_j \mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{M}_{Pj} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n}{\Delta t} \\ & + \mathbf{A}_{Pj} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_i^n) + \mathbf{G}_P \mathbf{p}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,  $\mathbf{M}, \mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{D}, \mathbf{C}$  はそれぞれ時間微分項, 移流項, 圧力項, 粘性項, 連続項の係数行列を表す. 添字  $S, P$  は SUPG 項, PSPG 項に起因する行列である. また, 有限要素方程式の解法としては反復解法である GPBi-CG 法を用いる.

## (2) NURBS

本研究では基底関数に用いる Spline 関数として, 制御点に付与される重みによって, 少ない要素数で様々な形状を表現することができる NURBS 関数を用いた. 3 次元の NURBS 関数は, 三方向の B-Spline 基底関数と制御点に付与される重み, 制御点の位置ベクトルによって表現される. B-Spline 基底関数は, 式 (7) の Cox de Boor の漸化式によって定義される関数である.

$p = 0$

$$\begin{aligned} N_{i,0}(\xi) &= 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ N_{i,0}(\xi) &= 0 & \text{otherwise} \end{aligned}$$

$p = 1, 2, 3 \dots$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (7)$$

ここで,  $N$  は  $\xi$  方向の B-Spline 基底関数,  $i$  は制御点番号,  $p$  は B-Spline 基底関数の次数,  $\xi_i$  はパラメータ空間の座標であるノットであり, 以下に示すようなノットベクトルと呼ばれる一様増加する数列によって与えられる.

$$\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}) \quad (8)$$

ノットベクトルは, CAD で描いた形状モデルから得られる数列で, B-Spline 基底関数と IGA における要素を定義するパラメータである. 式 (7) で表される B-Spline 基底関数を用くと, NURBS 関数の基底関数  $R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta)$  と NURBS ボリューム  $S(\xi, \eta, \zeta)$  は式 (9), (10) のように表される.

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}} \quad (9)$$

**KeyWords** : IGA, NURBS, 安定化有限要素法, Navier-Stokes 方程式

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL : 03-3817-1815 E-mail a17.jjbr@g.chuo-u.ac.jp

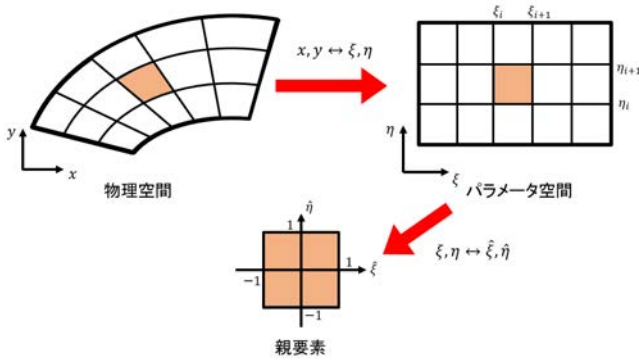


図-1 変数変換

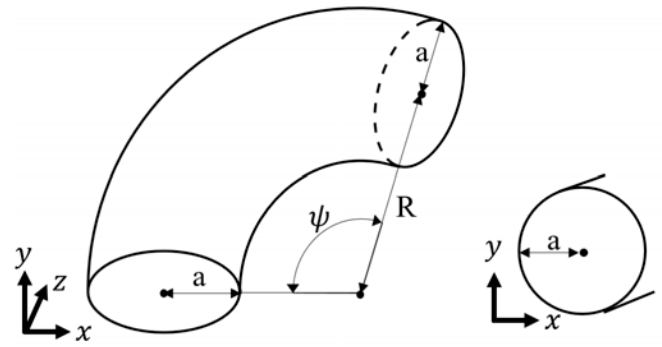


図-2 解析モデル

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) B_{i,j,k} \quad (10)$$

ここで、 $M, L$  は  $\eta, \zeta$  方向の B-Spline 基底関数、 $j, k$  は  $\eta, \zeta$  方向の B-Spline 基底関数の制御点番号、 $q, r$  は  $\eta, \zeta$  方向の B-Spline 基底関数の次数、 $w_{i,j,k}$  は物理空間の座標である制御点に付与される重み、 $B_{i,j,k}$  は制御点の位置ベクトルである。

式 (9) で示した NURBS 関数を用いて、各要素での流速と圧力、重み関数は式 (11), (12), (13) のように表現される。

$$u_i^e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{eI}(\xi, \eta) u_{i,I} \quad (11)$$

$$p^e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{eI}(\xi, \eta) p_I \quad (12)$$

$$w_i^e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{eI}(\xi, \eta) w_{i,I} \quad (13)$$

### (3) IGA における変数変換

Spline 関数を定義するノットはパラメータ空間の関数であり、数値計算はパラメータ空間において行われる。そのため、物理空間  $\Omega_e(x, y)$  とパラメータ空間  $\Omega_e(\xi, \eta)$  で変数変換を行う必要がある。また、数値積分の手法として、式 (14) に示す Legendre-Gauss の積分公式を用いるため、パラメータ空間  $\Omega_e(\xi, \eta)$  から親要素  $\hat{\Omega}_e(\hat{\xi}, \hat{\eta})$  にさらに変数変換を行う。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} d\hat{\zeta} = \sum_{i=1}^{ngp} \sum_{j=1}^{ngp} \sum_{k=1}^{ngp} F(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j, \hat{\zeta}_k) w_i w_j w_k \quad (14)$$

ここで、 $ngp$  は積分点数、 $\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j, \hat{\zeta}_k$  は親要素における積分点の座標、 $w_i, w_j, w_k$  は積分点の重みである。このように IGA では変数変換を二度施す必要がある (図-1 参照)。ま

た、パラメータ空間から親要素への変数変換は以下の式により行われる。

$$\hat{\xi} = -\frac{\xi_{i+1} + \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} + \frac{2}{\xi_{i+1} - \xi_i} \xi \quad (15)$$

$$\hat{\eta} = -\frac{\eta_{i+1} + \eta_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} + \frac{2}{\eta_{i+1} - \eta_i} \eta \quad (16)$$

## 3. 数値解析例

本報告では、図-2 に示す曲がりを含む円管路流れ問題を取り上げ IGA により解析を行い、実験結果と比較することにより構築した手法の妥当性と有効性を確認する。

### (1) 解析条件

管の半径  $a$ 、曲率半径  $R$  は領域内で一定とし、層流状態での解析を行った。また、補間関数は 2 次の NURBS を用いた。

### (2) 解析結果

解析結果は講演時に示す。

## 4. おわりに

本報告では、NURBS 関数を用いた IGA による 3 次元非圧縮性粘性流れ問題の解析手法について述べた。

今後の課題として、以下のことを取り組んでいく予定である。

- 実験結果との比較による定量的な評価
- 解析メッシュの分割数、NURBS の次数、積分計算の際の積分点数等による解析精度の検証
- NEFEM (NURBS Enhanced Finite Element Method) による解析

## 参考文献

- 1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 2) 安井太一, 吉田也真都, 長谷部寛, 櫻山和男: IGA の非圧縮性粘性流れ解析への適用性に関する基礎的検討, 土木学会全国大会第 77 回年次学術講演会, CS5-18, 2022