

IGA を用いた 2次元弾性体解析に関する基礎的研究

中央大学 学生会員 ○坂井 祐仁
中央大学 正会員 檜山 和男中央大学 学生会員 安井 太一
日本大学 正会員 長谷部 寛

1. はじめに

通常の有限要素法解析における CAD を用いた設計は、Spline 関数を用いて表現されるため、構造物の曲面部で形状誤差が生じてしまう。この問題を解決する手法として、近年 IGA¹⁾²⁾ (Isogeometric Analysis) が注目されている。

本発表では、IGA を用いた流体構造連成解析に向けた第一段階として、IGA を用いた 2次元弾性体解析の精度と計算時間について、従来の有限要素法との比較を行った。

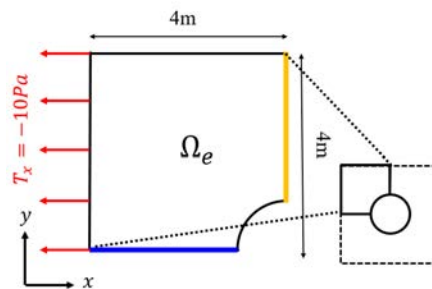


図-1 解析領域

2. 数値解析手法

(1) NURBS

NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) は、B-Spline 関数に重みづけをすることで求められる。NURBS を求める際に必要となる B-Spline 関数は以下のように定義される。

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (p=0)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

i は制御点の番号、 p は B-Spline 基底関数の次数、 ξ はノットを表す。ノットとは B-Spline 基底関数を決定するパラメータで、そのノットの並び、 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ をノットベクトルという。このノットベクトルは単調増加する数列である。式 (1) を用いて IGA で解析領域を表現する NURBS 曲面、形状関数となる NURBS 基底関数は式 (2)、式 (3) のように表される。

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (2)$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{B} は制御点、 w は各制御点における重みを表す。

(2) 支配方程式

2次元弾性体解析における支配方程式は以下に示す応力のつり合い方程式、ひずみ-変位関係式、応力-ひずみ関係式の 3 式で表される。

$$\partial^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial \mathbf{u} \quad (6)$$

これら 3 式に対して、空間方向に IGA に基づく Galerkin 法を用い、補間関数に NURBS 関数を用いる。

(3) IGA における変数変換

IGA では形状関数である NURBS 基底関数がノット (ξ, η) から決定される関数であるので、物理空間 $\Omega_e(x, y)$ からパラメータ空間 $\tilde{\Omega}_e(\xi, \eta)$ へ変数変換を行う。その後、積分を行うためにパラメータ空間 $\tilde{\Omega}_e(\xi, \eta)$ から親要素 $\tilde{\Omega}_e(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ へ変数変換を行い、親要素上で積分を行うことで係数行列を求めていく。

座標変換後の式系は、(7) 式のように表される。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e |J| d\bar{\xi} d\bar{\eta} d_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{R}_e^T \mathbf{b} |J| d\bar{\xi} d\bar{\eta} + \int_{-1}^1 \mathbf{R}_e^T(a, \bar{\eta}) \mathbf{t} |J| d\bar{\eta} + \int_{-1}^1 \mathbf{R}_e^T(\bar{\xi}, b) \mathbf{t} |J| d\bar{\xi} \quad (7)$$

なお、 $|J|$ は物理空間から親要素への座標変換に伴い現れるヤコビアンである。

数値積分には以下に示す Gauss の求積法を用いる。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} = \sum_{i=1}^{gn} \sum_{j=1}^{gn} F(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_j) W_i W_j \quad (8)$$

ここで、 gn は積分点数、 $\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_j$ は積分点、 W_i, W_j は積分点にかかる重みを表す。

3. 数値解析例

数値解析例として、円孔平板を対象とした 2次元弾性体解析を取り上げる。

(1) 解析条件

解析領域は図-1 に示す四分の一の円孔平板で、領域の対称性を利用している。境界条件として、平板が隣接する部分 (図の黄色、青色) の部分に Dirichlet 境界条件を与えている。

KeyWords : IGA, NURBS, アイソパラメトリック要素, 構造解析

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL : 03-3817-1815 E-mail a19.appt@g.chuo-u.ac.jp

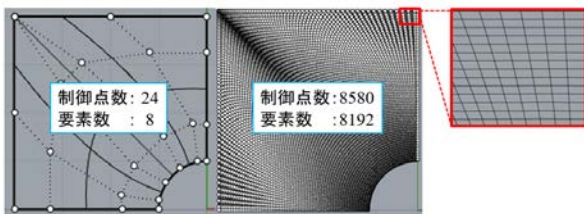


図-2 IGAにおける解析領域



図-3 FEMにおける解析領域

(2) 解析メッシュ

IGA, FEMにおける解析メッシュをそれぞれ図-2, 図-3に示す。今回は、それぞれ6通りの解析メッシュを用いて解析を行っているが、2通りのメッシュをこちらに示し、その他のメッシュに関しては発表時に示す。

(3) 解析結果

それぞれの要素における解析結果のコンター図と最大の応力値を図-4, 図-5に示す。コンター図は、赤色で表される部分において応力集中が生じており、最大の応力値となっている。

この結果より、定性的ではあるが、IGAは、FEMに比べて少ない要素数で高精度な解析を行えることを確認した。

次に、定量的な評価を行う。図-6は、横軸に自由度数（節点数, 制御点数）、縦軸に応力値をとった自由度数-応力グラフである。この結果より、IGAでは、FEMと比べて要素数が少なくとも高精度な解析を行えることを確認した。

次に計算時間に関する評価を行う。図-7は、相対誤差と計算時間を表すグラフである。この結果より、IGAはFEMに比べて短い計算時間で精度の高い解が得られることがわかる。しかし、要素数が増え、解が収束していくと、計算時間の優位性が失われることがわかる。

4. おわりに

本報告では、IGAとアイソパラメトリック要素を用いたFEMでの比較に取り組み以下の結論を得た。

- 2次元円孔平板構造解析において、IGAは従来の有限要素法に比べて少ない要素数で高精度な解析を行える。
- IGAは、従来の有限要素法に比べて短い計算時間で高精度な解析を行える。
- 自由度数を増やし、解が収束していくと、IGAにおける計算時間の優位性が失われる。

今後は、積分点に関する検討やNURBSの次数が積分点に与える影響についての検討を行う。

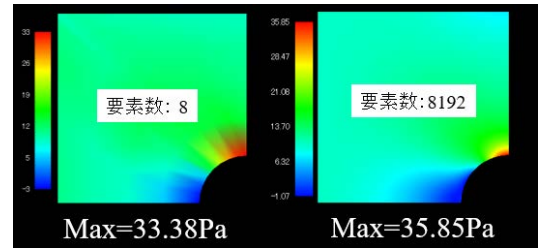


図-4 IGAにおける解析結果と応力の最大値

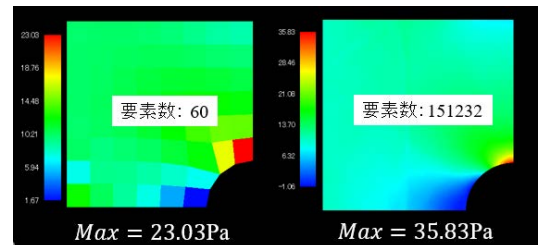


図-5 FEMにおける解析結果と応力の最大値

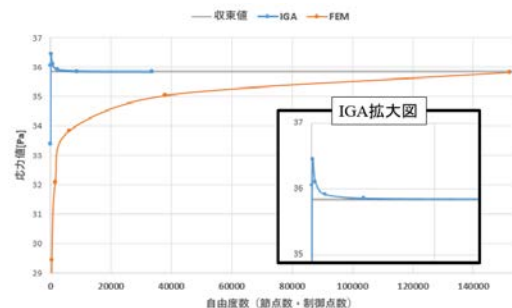


図-6 自由度数と応力値の関係

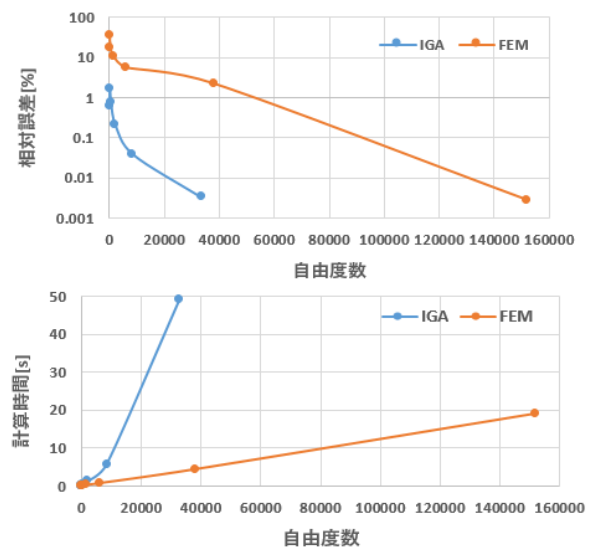


図-7 計算時間と相対誤差の関係

参考文献

- 1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 2) J.A.Cottrell, T.J.R.Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis : Toward integration of CAD and FEA, *Wiley Publishing*, 335p, 2009.