

# 有限要素法による津波解析における遡上域の精度向上に関する研究

中央大学 学生会員 ○ 田部井 優奈 (株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史  
中央大学 正会員 檜山 和男

## 1. はじめに

津波遡上解析において、遡上域の精度を向上させることは非常に重要である。そこで、本研究では水際線の移動境界手法について検討を行った。固定メッシュにおける水際要素の陸域節点に流速 0 を与える手法<sup>1)</sup>と水際要素の陸域節点に流速を与える手法<sup>2)</sup>を用いて遡上域の精度について比較・検討を行うことを目的とする。

## 2. 数値解析手法

### (1) 支配方程式

津波の支配方程式として、以下に示す浅水長波理論に基づく浅水長波方程式（非線形長波方程式）を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{N}_{ij}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{R} - \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ u_1 H \\ u_2 H \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \\ c^2 - u_1^2 & 0 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{11} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u_1 & 2 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{12} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{21} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{22} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \\ -2u_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}$  は未知ベクトル,  $\mathbf{R}$  は勾配ベクトル,  $\mathbf{A}_i$  は移流マトリックス,  $\mathbf{N}_{ij}$  は拡散マトリックス,  $\mathbf{G}$  は摩擦マトリックス,  $H$  は全水深,  $u_i$  は各方向の流速,  $h$  は静水深,  $c$  は波速,  $z$  は河床高さ,  $\nu_e$  は渦動粘性係数,  $n$  はマンニングの粗度係数である。

### (2) 解析手法

空間方向の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法を, 時間方向の離散化として, 2次精度を有する Crank-Nicolson 法を用い, 連立一次方程式の解法には, Element-By-Element 処理による Bi-CG STAB 法を用いる。

### (3) 移動境界手法

津波の遡上挙動の表現のために, 任意形状への適応性に優れ, アルゴリズムが比較的容易な Euler 的手法に基づく移動境界条件 (図-1) を適用する。領域分割に伴い, 以下

のように移動境界処理を施す。

(1) 各節点における全水深  $H$  と微小水深  $\epsilon$  とを比較し, 3 節点全ての全水深  $H$  が微小水深  $\epsilon$  以下であれば, その要素は陸域要素とみなし, 計算領域から除外する。このとき, 流速  $u_i^n = 0$  とする。

(2) 各節点における全水深  $H$  と微小水深  $\epsilon$  とを比較し, 3 節点のうち, 1 つもしくは 2 つの全水深が  $\epsilon$  以上であれば, その要素は水際要素とみなし, 計算領域に含める。また, 陸域節点の流速  $u_i^n = 0$  とする。

上記の手法は, 水際線上の流速を 0 にしていることから水際線上の移動時に抵抗が生じる。そこで, 水際要素において流速が減衰しないように水際要素の陸域節点に図-2 のように流速を与える手法を適用する。また, 陸域節点に与える流速を式 (2) に示す。

$$u_i^n = \sum_{l=1}^k \frac{u_l}{k} \quad (u_i > 0) \quad (2)$$

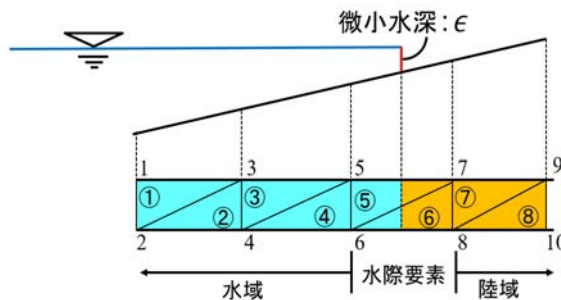
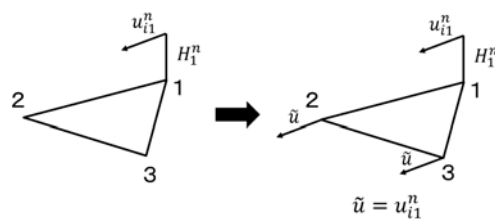
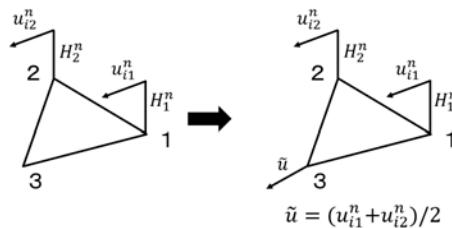


図-1 移動境界手法



1つの節点が微小水深以上の場合



2つの節点が微小水深以上の場合

図-2 水際要素での流速に対する境界条件の処理

**KeyWords :** 津波, 安定化有限要素法, 浅水長波方程式, 南海トラフ地震

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL: 03-3817-1815 E-mail a19.s3fd@g.chuo-u.ac.jp

### 3. 数値解析例

#### (1) 2次元ダムブレイク問題

水際線の移動境界手法の精度検証のため、2次元ダムブレイク問題を取り上げる。

##### a) 解析条件

解析モデルを図-3に示す。この問題において、水の粘性と河床の摩擦を考慮しないものとするれば、厳密解<sup>3)</sup>は $x_1$ 方向の流速 $u$ は式(3)、水深 $h$ は式(4)で表される。

$$u(x_1; t) = \frac{2}{3} \left( C_0 + \frac{x_1 - a}{t} \right) \quad (3)$$

$$h(x_1; t) = \frac{2}{9g} \left( 2C_0 - \frac{x_1 - a}{t} \right)^2 \quad (4)$$

ここで、 $C_0$ は初期水深の波速 $C_0 = \sqrt{gh_0}$ 、 $a$ はダムの水位が終わる $x_1$ の座標値ある。

解析メッシュに関しては、 $x_1$ 方向のメッシュ幅を変更した $\Delta x_1 = 0.05m$ と $\Delta x_1 = 0.1m$ の2種類のメッシュで解析を行った。微小時間増分量は $0.0025s$ とし、微小水深は $0.002m$ とした。ダムの初期水深は $0.2m$ とし、境界条件として水際線は移動境界、その他にはslip条件を与えた。水際線の移動手法は、流速に対する境界条件を変更した以下の2つの手法でそれぞれ解析を行い、解析結果の比較を行った。

- case A : 水際要素の陸域節点に流速0を与える手法
- case B : 水際要素の陸域節点に水域節点の平均流速を与える手法 (式(2)の境界条件を与える手法)

##### b) 解析結果

解析結果として、 $t = 2$ の解析結果をメッシュ分割幅 $0.05m$ は図-4、 $0.1m$ は図-5に示す。これらの解析結果から以下のことが考察される。

- caseAは、流速0を含みながら進行するため、流速が減衰し、水際要素の先端で水面が上がり、厳密解との差異が生じる。
- caseBは、水際要素の陸域節点に流速を与えたことから水際線上の抵抗が減小し、厳密解と良好な一致を得られたといえる。
- 水深の解析結果から遡上域を比較すると、caseBは水際線上の抵抗が減小することから遡上域がcaseAより広がる。
- メッシュ分割幅を $\frac{1}{2}$ にすると、caseA、caseB共に厳密解に近づくものの、caseBはcaseAより波形の変化が小さい。

これらの解析結果と厳密解の比較より、caseBが厳密解と定量的に一致したことから、caseBの手法の有効性を確認した。

#### 4. おわりに

本研究では、固定メッシュにおける水際線の移動手法において、水際要素の陸域節点に流速0を与えるcaseAの手法と流速を与えるcaseBの手法の2パターンで津波遡上解析を行い、以下の結論を得た。

- ダムブレイク問題において、caseBの手法が厳密解と定量的に一致し、有効性が高いことが実証された。

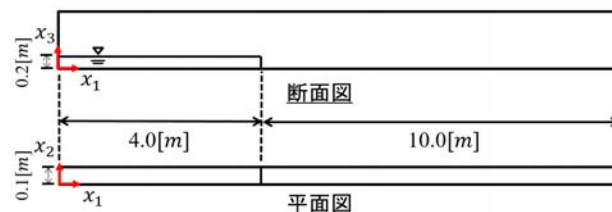


図-3 解析モデル

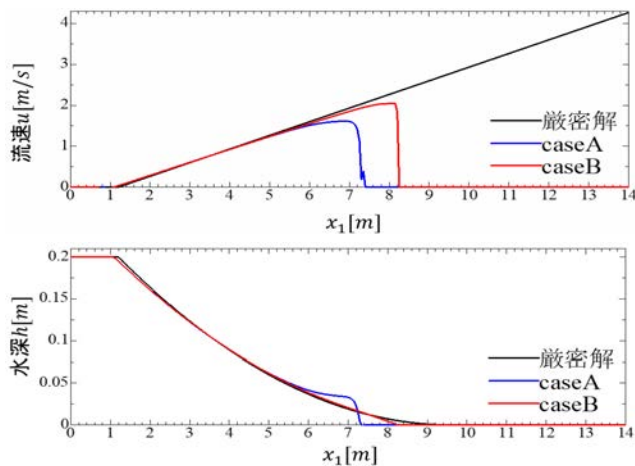


図-4 メッシュ分割幅 $0.05m$ の解析結果 (上: 流速, 下: 水深)

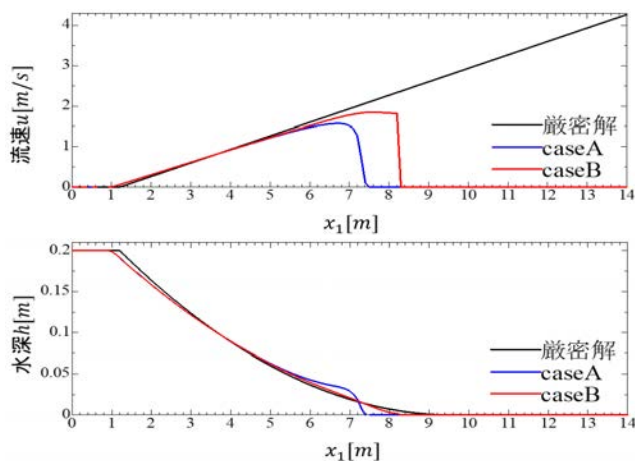


図-5 メッシュ分割幅 $0.1m$ の解析結果 (上: 流速, 下: 水深)

- メッシュ分割幅を変更した時の波形の変化からcaseAの手法よりcaseBの手法の方がメッシュ幅の変更による影響が小さいことが確認された。

今後は、caseBの手法を実地形に適用し、caseAの手法との比較を行う。実地形適用例は、南海トラフ地震を想定した津波遡上解析とし、解析結果は発表時に示すものとする。

#### 参考文献

- 1) M.Kawahara and T.Umetsu : Finite element method for moving boundary program in river flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluid*, Vol.6, pp.365-386, 1986.
- 2) Junichi Matsumoto, Abdul A. Khan, Sam S. Y. Wang and Mutsuto Kawahara : Shallow water flow analysis with moving boundary technique using least-squares bubble function, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol.16(2), pp.129-134, 2002.
- 3) J. J. Stoker : WATER WAVES, Interscience Publishers, New York, 1957.