

バックグラウンドメッシュを用いた Space-Time 有限要素法による 東京湾高潮解析

中央大学大学院 学生会員 中村 光太郎
八戸工業大学 正会員 高瀬 慎介
中央大学 正会員 櫻山 和男

1. はじめに

我が国では 1959 年の伊勢湾台風や 2004 年の台風 16 号により、高潮が発生し多くの家屋や人命に被害をもたらした。近年、台風被害が頻発化・激甚化し、加えて気候変動による海面上昇等により、将来さらに高潮による災害リスクが高まるおそれがある。高潮に対する災害対策を検討する上で、高精度な高潮解析手法の構築は必要不可欠である。高潮による被害は沿岸域における護岸からの越水だけでなく、河川を逆流した海水の氾濫など、被害は内部にまで至るため、氾濫域を高精度に表現可能な計算手法が必要となる。

そこで本研究では、移動境界問題に対し高精度かつ時間方向に安定性の高い Space-Time 有限要素法に着目し、バックグラウンドメッシュを用いた Space-Time 有限要素法により東京湾での高潮解析を行う。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

高潮解析の支配方程式として、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}) = \mathbf{R} \quad (1)$$

各ベクトル、各マトリックスは以下ようになる

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial(z-\zeta_0)}{\partial x_1} - \frac{u_1 H C_D \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} + \frac{\rho_a C_D \sqrt{w_1^2 + w_2^2} w_1}{\rho} \\ -c^2 \frac{\partial(z-\zeta_0)}{\partial x_2} - \frac{u_2 H C_D \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} + \frac{\rho_a C_D \sqrt{w_1^2 + w_2^2} w_2}{\rho} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \\ c^2 - u_1^2 & 0 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{11} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u_1 & 2 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{12} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{22} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \\ -2u_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ u_1 H \\ u_2 H \end{bmatrix}, C_f = \frac{gn^2}{H^{\frac{1}{3}}}$$

ここで、 H は全水深、 w_i は風速、 c は波速、 z は河床高さ、 ρ 、 ρ_a は、それぞれ水の密度、空気の密度、 u_i は各方向の流速、 g は重力加速度、 ν は渦動粘性係数、 n はマンニングの粗度係数、 ζ_0 は気圧低下に伴う水位上昇量、 C_D は抗力係数であり本多・光易の式¹⁾を用いる。また、 \mathbf{U} は未知項、 \mathbf{R}

は勾配及び摩擦ベクトル、 \mathbf{A}_i は移流行列、 \mathbf{K}_{ij} は拡散行列である。

(2) 台風モデル

台風の気圧分布は次式に示す Myers の式で与えた。

$$P(r) = P_c + \Delta P \exp\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad (2)$$

ここに、 $P(r)$ は台風中心から距離 r だけ離れた地点での気圧、 P_c は台風の中心気圧、 ΔP は気圧の深度、 r_0 は台風内の最大風速地点の台風中心からの距離である。このような気圧分布の下で、傾度風速 V_{gr} は次式で与えられる。

$$V_{gr} = -\frac{rf}{2} + \sqrt{\left(\frac{rf}{2}\right)^2 + \frac{\Delta P r_0}{\rho_a r} \exp\left(-\frac{r_0}{r}\right)} \quad (3)$$

ここで、 f はコリオリ係数、 ρ_a は空気の密度である。ここで、 V_{ti} を台風の移動速度、 x_{ci} を台風の中心座標とすると風速 w_i は次式で与える。

$$w_1 = C_1 V_{t1} \exp\left(-\frac{r\pi}{500 \times 10^3}\right) - C_2 V_{gr} \frac{(x_1 - x_{c1}) + \sqrt{3}(x_2 - x_{c2})}{2r} \quad (4)$$

$$w_2 = C_1 V_{t2} \exp\left(-\frac{r\pi}{500 \times 10^3}\right) + C_2 V_{gr} \frac{\sqrt{3}(x_1 - x_{c1}) - (x_2 - x_{c2})}{2r} \quad (5)$$

ここで、 C_1 、 C_2 は風速の低減係数であり、藤井・光田のモデル²⁾を用いる。式 (1) の気圧低下に伴う水位上昇量 ζ_0 は次式で与える。

$$\zeta_0 = 0.991(1013 - P(r)) \times 10^{-2} \quad (6)$$

(3) Space-Time 有限要素法

Space-Time 法³⁾は、空間と時間の双方に対して有限要素法を適用する手法であり、時間・空間領域 (Space-Time slab) 毎に独立に離散化を行う。Space-Time slab とは、図-1 に示すように、時刻 t_n での空間領域 Ω_n と時刻 t_{n+1} での空間領域 Ω_{n+1} を連結したものであり、ここで t_n^+ と t_{n+1}^- での \pm は slab 内での上下を表している。その後、各々一つ前の Space-Time slab の情報をもとに slab 内での節点における未知量を求め、時間進行していく方法である。このため時間刻み毎のメッシュ同士が幾何学的に連続である必要はない。

KeyWords: 高潮解析, Space-Time 有限要素法, バックグラウンドメッシュ

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: a16.jffy@g.chuo-u.ac.jp

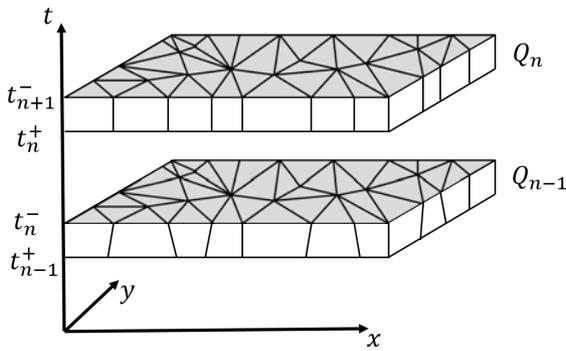


図-1 Space-Time slab

(4) 定式化

式(1)に対し, Space-Time slab 毎に有限要素法の適用を行う. いま, t_n^+ と t_{n+1}^- に囲まれた領域に着目して, 時間方向の不連続量を含む形を考えると次式のようなになる.

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) d\Omega dt \\
 & + \int_{\Omega} (\mathbf{U}^*)_n^+ ((\mathbf{U})_n^+ - (\mathbf{U})_n^-) d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \tau \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t} + \mathbf{A}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_j} - \mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^*}{\partial x_i^2} \right) \\
 & \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_i^2} - \mathbf{R} \right) d\Omega_e dt \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) \\
 & = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{R} d\Omega_e dt \quad (7)
 \end{aligned}$$

ここに, 左辺第1項は Galerkin 項, 第2項は時刻 t_n における解の連続性を弱く要求するものであり, 第3項は GLS 法による安定化に寄与する項である. また, 第4項は衝撃捕捉項である. ここで τ, δ は安定化パラメータである.

(5) メッシュ再構築手法

本研究では, 移動境界を表現する際に, あらかじめ流体が移動する領域全体にバックグラウンドメッシュを設置しそれに基づいて解析メッシュの再構築を行う⁴⁾. 図-2 に示すように, メッシュを再構築するための領域をバックグラウンドメッシュから定義する. その際, 定義された計算領域は水域を包含するように定義する. その後, 水際線に割り当てられた節点は, その節点から最も近い水域の水際線上に移動させ, その移動量を境界条件とし, 線形弾性方程式を解くことにより, 内部節点の移動量を求め, 新たにメッシュが再構築される.

また, 再構築されたメッシュの節点上には物理量は配置されていないため水域の物理量を再配置する必要がある. この再配置には, 図-3 に示すように, 面積座標に基づく CIVA 法⁵⁾ で用いられる 3 次補間式により補間を行っている.

3. 数値解析例

数値解析例として 図-4 に示す東京湾の有限要素メッシュを用いて, 高潮氾濫解析を行う. 最小メッシュ幅は 5m である. また, 解析で用いる台風の条件として, 2019 年の台

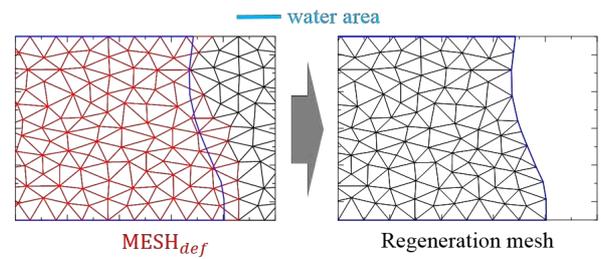


図-2 Mesh regeneration workings

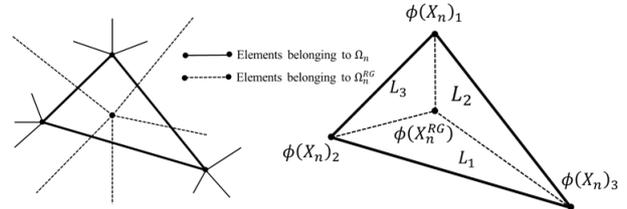


図-3 Interpolation of physical quantities

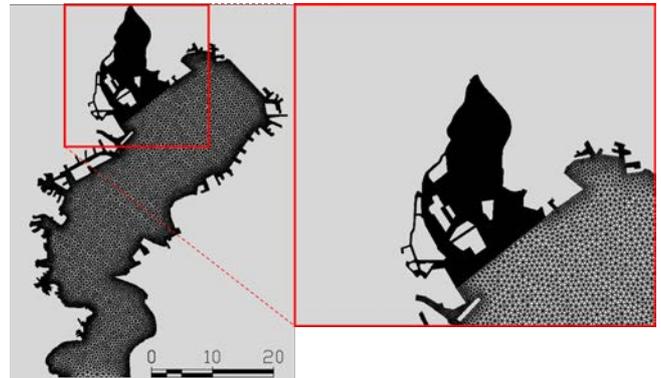


図-4 東京湾メッシュ分割図

風 19 号の経路, パラメータにおいて解析を行う. 氾濫解析の対象領域として東京都江東区付近の陸部を対象とする.

解析結果は講演時に示す.

4. おわりに

本研究では, バックグラウンドメッシュを用いた Space-Time 有限要素法により東京湾での高潮解析を行った.

今後の予定として, 過去に起きた高潮の観測値と遡上域の比較により本手法の妥当性の検証を行う.

参考文献

- 1) Mitsuyasu, H. and Honda, T., The High Frequency Spectrum of Wind Generated Wave, J. Oceanog. Soc. Japan, 30, No4, 1974.
- 2) 藤井健, 光田寧, 台風の確立モデルの作成とそれによる強風のシミュレーション, 京都大学防災研究所年報, 29, B-1, pp229-239, 1986.
- 3) Thomas J.R.Hughes, Gregory M.Hulbert, Space-Time finite element methods for electrodynamics, Comput.Methods Appl. Mech. Engrg., 66, pp.339-363, 1988.
- 4) Shinsuke, T., Seizo, T., Kazuo, K. and Tayfun, E. T., Space-Time SUPG finite element computation of shallow-water flows with moving shorelines, Comput Mech, 48, pp.293-306, 2011.
- 5) Tanaka, N., The CIVA method for mesh-free approaches: improvement of the CIP method for nsimplex, Computational Fluid Dynamics JOURNAL, 8, no.1, pp.121-127, 1999.