# IGAを用いた２次元移流問題の解析

中央大学大学院　学生会員　○ 安井　太一
日本大学　正会員　長谷部　寛
中央大学　正会員　樫山　和男

## 1.　はじめに

IGA（Isogeometric Analysis）[1)] は医療分野，自動車や精密機械の分野の数値解析において，近年盛んに研究と適用が行われている手法である．IGA は CAD（Computer Aided Design）の形状表現に用いられる Spline 関数を基底関数として用いるため，CAD で描いた形状から直接解析メッシュを作成することができる．そのため，メッシュの作成プロセスを削減でき，曲線等も形状誤差なく表現することができる．

そこで本報告では IGA により流体解析を行うことを目的とし，2 次元移流問題に対する NURBS 関数を用いた IGA を適用して解析を行った．

## 2.　数値解析手法

### (1)　NURBS

本研究では，IGA における形状関数に NURBS 関数を用いた．NURBS 関数とは、Non-Uniform Rational Bspline（非一様有理 B スプライン）の略であり，NURBS の曲線式 $C(\xi)$ と NURBS の基底関数 $R_i^p$ は次式で表される．

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_i^p(\xi) B_i \tag{1}$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^{n} N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}}} \tag{2}$$

ここで，$B_i$ は $i$ 番目の制御点における座標データ，$N_{i,p}$ は B スプラインの基底関数，$w_i$ は $i$ 番目の制御点における重みの値，$p$ は曲線の次数，$n$ は制御点の数である．また，$N_{i,p}$ は式（3）に示す Cox/de Boor の漸化式によって決定される．

$p=0$ の場合

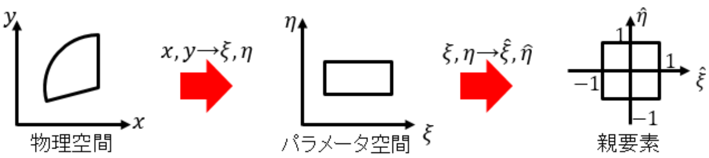
$$N_{i,0}(\xi) = 1 \quad \text{if} \quad \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}$$
$$N_{i,0}(\xi) = 0 \quad \text{otherwise}$$

$p=1,2,3\cdots$ の場合

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{3}$$

ここで，$\xi$ はノットと呼ばれ，ノットは以下に示すようなノットベクトル $\Xi$ と呼ばれる一様増加する数列の成分値である．

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{n+p+1}\} \tag{4}$$




図－１　変数変換

### (2)　移流問題における IGA を用いた定式化

解析例として，2 次元移流問題を取り扱う．支配方程式は，以下に示す移流方程式を用いる．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

ここで，$\phi$ は物理量，$c$ は移流速度である．この式に対し重み付き残差法を適用することで以下の弱形式 (6) を得る．

$$\int_\Omega \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi^* c_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega = 0 \tag{6}$$

ここで，$\phi^*$ は重み関数である．この式に対し空間方向に SUPG 法に基づく安定化有限要素法，時間方向に Crank-Nicolson 法を適用し離散化を施すと，以下の有限要素方程式 (7) を得る．

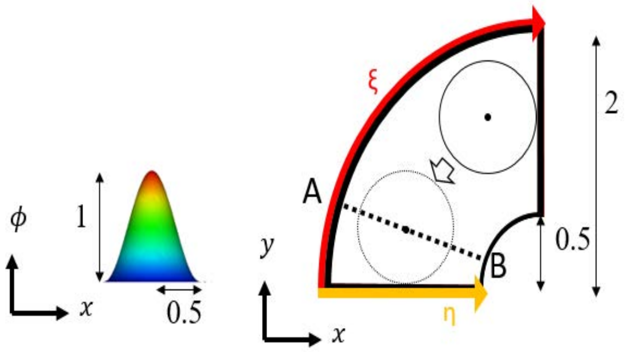
$$\left( \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{M}+\mathbf{M_s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A_s}) \right) \phi^{\mathbf{n+1}} = \left( \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{M}+\mathbf{M_s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A_s}) \right) \phi^{\mathbf{n}} \tag{7}$$

ここで，$\mathbf{M}$ は質量行列，$\mathbf{A}$ は移流行列，$n$ は時間ステップ，添え字 $s$ は SUPG 法に起因する行列を示すものである．

各領域において積分計算を行うために Legendre-Gauss の積分公式を用いて数値積分を行う．また，IGA では解析領域の存在する物理空間 $\boldsymbol{x}(x,y)$ から，計算を行うパラメータ空間 $\boldsymbol{\xi}(\xi,\eta)$ への変数変換が行われる．そのため，図-1 に示すように，物理空間 $\boldsymbol{x}(x,y)$ からパラメータ空間 $\boldsymbol{\xi}(\xi,\eta)$，パラメータ空間 $\boldsymbol{\xi}(\xi,\eta)$ から数値積分を行うための親要素 $\hat{\boldsymbol{\xi}}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ へと二度の変数変換が行われることになる．以上を考慮すると，式（7）における各項は以下のように表される．

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{ngp} \sum_{j=1}^{ngp} \mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right), \eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right) \mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right), \eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right) \left|\mathbf{J}_{x,\hat{\xi}}\left(\hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j\right)\right| \rho_i \rho_j \tag{8}$$

KeyWords：　IGA，NURBS，安定化有限要素法，移流方程式
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL：03-3817-1815　E-mail a17.jjbr@g.chuo-u.ac.jp




図－２　解析モデル，初期条件

表－１　解析メッシュ

| | メッシュ1 | メッシュ2 |
|---|---|---|
| 要素分割数 | 32×32 | 32×32 |
| 補間関数 | ξ方向に2次のNURBS<br>η方向に1次のNURBS | ξ方向に2次のNURBS<br>η方向に2次のNURBS |
| 1要素の制御点数 | 6 | 9 |

$$\mathbf{M}_s = \tau_e \sum_{i=1}^{ngp}\sum_{j=1}^{ngp} \mathbf{B}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right)\mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right) c\mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right)\left|\mathbf{J}_{x,\hat{\xi}}\left(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_j\right)\right|\rho_i\rho_j \tag{9}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{ngp}\sum_{j=1}^{ngp} \mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right)\mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right) c\mathbf{B}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right)\left|\mathbf{J}_{x,\hat{\xi}}\left(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_j\right)\right|\rho_i\rho_j \tag{10}$$

$$\mathbf{A}_s = \tau_e \sum_{i=1}^{ngp}\sum_{j=1}^{ngp} \mathbf{B}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right)\mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right) c\mathbf{N}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right) c\mathbf{B}_e\left(\xi\left(\hat{\xi}_i\right),\eta\left(\hat{\eta}_j\right)\right)\left|\mathbf{J}_{x,\hat{\xi}}\left(\hat{\xi}_i,\hat{\eta}_j\right)\right|\rho_i\rho_j \tag{11}$$

ここで，$ngp$ は，Legendre-Gauss の積分公式における積分点数であり，$\rho_i, \rho_j$ はその重みである．$\tau_e$ は SUPG 法における安定化パラメータであり，$\mathbf{N}_e$ は，ある $\xi, \eta$ における形状関数である．$\mathbf{B}_e$ は $\mathbf{N}_e$ を空間方向に微分したもので，$\left|\mathbf{J}_{x,\hat{\xi}}\right|$ は $x$ から $\hat{\xi}$ への変数変換の Jacobian である．

## 3. 数値解析例

本研究では，図-2 に示す解析モデルにおける 2 次元移流問題を取り上げ，形状関数の次数，積分点数による比較を行った．

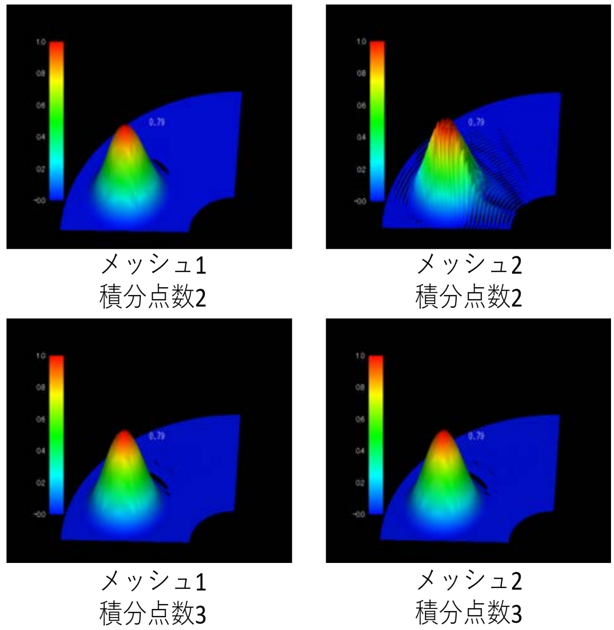
### (1) 解析条件

境界条件としては，領域の全境界において物理量 $\phi = 0$ を与えた．微小時間増分量 $\Delta t$ は $\frac{\pi}{400}$，総ステップ数を 100 とした．解析メッシュは，表-1 に示すように，要素分割数は変えず補間に用いた NURBS 関数の次数を変更し，結果を比較した。

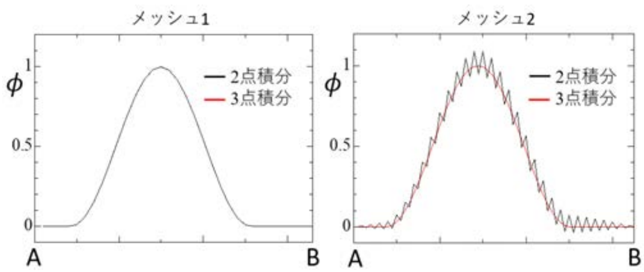
### (2) 解析結果

解析結果として，図-3 に各メッシュにおける最終ステップ時の結果を，図-4 に最終ステップにおける AB の断面図を示す．この結果から以下のことが確認できた．

- $\xi$ 方向に 2 次の NURBS 関数，$\eta$ 方向に 1 次の NURBS 関数を用いた場合，積分点数によって結果に違いはみられなかった．
- $\xi$，$\eta$ 方向の両方に 2 次の NURBS 関数を用いた場合，2 点積分を用いると解析領域全体で振動が発生し，ピーク値において振幅は 0.05 程度であった．一方，3 点積分では振動はみられなかった．




図－３　各メッシュにおける最終ステップでの可視化結果




図－４　最終ステップにおける AB の断面図

## 4. おわりに

本報告では，NURBS 関数を用いた IGA を 2 次元移流問題について述べた．補間に用いる NURBS の次数と積分点数を変化させて計算結果の比較を行ったことにより，2 次元移流問題において，補間に用いる NURBS 関数の次数を増やすと，解析を行う際の積分点数も増やす必要があることが分かった．

今後は積分点数に関して更なる検討を行うとともに，2 次元 Navier-Stokes 方程式についても IGA による解析を行う予定である．

参考文献

1) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, pp.4135-4195, 2005