

演算子積分時間領域境界要素法を用いた 異方性・粘弾性体中の空洞に対する2次元逆散乱解析

○群馬大学大学院 学生会員 竹田 晴彦
群馬大学大学院 正会員 斎藤 隆泰

1. はじめに

演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM)¹⁾ は、従来の時間領域境界要素法に対し、演算子積分法を適用することで、数値解の安定性を向上させた、新たな時間領域境界要素法である。また、CQBEM は時間領域解法でありながら、波動に分散性を持つ問題の解析をも可能とした手法であり、今日までに様々な波動問題に対して適用されてきた²⁾。しかしながら、異方性および粘弾性の両者の性質を考慮した波動問題に対する解析例は未だに少ない。一方、固体中の欠陥により発生する散乱波を用いて、その欠陥の位置・個数や形状を同定する逆散乱解析法³⁾ に関しても、同様に様々な問題に対して開発が行われてきた。しかしながら、異方性・粘弾性体中の欠陥に対する逆散乱解析の開発は、著者らの知る限り行われていない。よって本研究では、異方性・粘弾性体中の欠陥に対する逆散乱解析の開発を行う。数値解析例として、異方性・粘弾性体中の空洞を対象とした、2次元純面外波動を用いた逆散乱解析結果を示し、本解析の妥当性を検討する。

2. 異方性・粘弾性弾性体中の空洞に対する2次元逆散乱解析の定式化

ここでは、図1に示すような、2次元異方性・粘弾性体 D 中の空洞 D_c の位置および形状を再構成する逆問題を考える。なお、本研究では簡単のため、純面外波動のみを考え、面外方向の変位を u_3 と記述する。

本解析では、図1において、空洞近傍の原点 o に向け入射波 $u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ を送信し、空洞境界 S によって発生する散乱波 $u_3^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$ を、入射波と同じ方向に位置する点 $\mathbf{x}$ によって観測する。その後、観測された散乱波を用いて空洞を再構成する。ここで、散乱波の積分表現式には、対象とする波動問題における基本解が必要となる。しかし、一般に粘弾性波動問題のような、分散性波動問題に対する時間領域基本解の導出は困難である。よって以下では、周波数領域において逆散乱解析の定式化を行う。さて、周波数領域における散乱波の積分表現式は、次のように表される。

$$\tilde{u}_3^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) = - \int_S \tilde{T}_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \tilde{u}_3(\mathbf{y}, \omega) dS_y \quad (1)$$

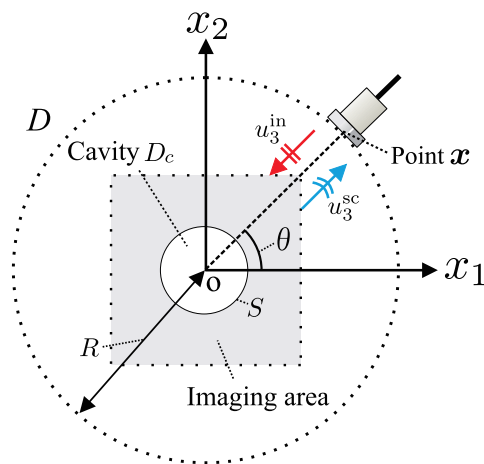


図1 逆散乱解析モデル。

ここで、 $(\tilde{\cdot})$ は周波数領域での物理量、 $\tilde{T}_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ は周波数領域における2次元純面外異方性・粘弾性波動問題における二重層核である。さて、欠陥により発生する散乱波は、一般に、その欠陥長に比べ十分遠方で観測される。そのため、式(1)の散乱波の積分表現式に対し、遠方場近似³⁾ が適用できる。さらに、式(1)の右辺には、境界 S 上の未知変位 $\tilde{u}_3(\mathbf{y}, \omega)$ を含んでいるため、Born 近似³⁾ を用いて方程式を線形化近似する。Born 近似では、次式のように、未知変位 $\tilde{u}_3(\mathbf{y}, \omega)$ を入射変位 $\tilde{u}_3^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega)$ で置き換える。

$$\tilde{u}_3(\mathbf{y}, \omega) \simeq \tilde{u}_3^{\text{in}}(\mathbf{y}, \omega) = F(\omega) \exp(i\tilde{k}^*(\omega) \hat{\mathbf{p}}^{\text{in}} \cdot \mathbf{y}) \quad (2)$$

ただし、 $F(\omega)$ は入射波の振幅、 $\tilde{k}^*(\omega)$ は複素波数、 $\hat{\mathbf{p}}^{\text{in}}$ は進行方向単位ベクトルを表す。加えて、欠陥内部でのみ値を持ち、その他の領域ではゼロとなる次の特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{y} \in D_c \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

を式(1)に導入する。式(3)の特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$ の導入により、式(1)の積分範囲を、境界 S から全領域 A へと拡張できる。以上より、最終的に散乱波の積分表現式は、次式で得られる。

$$\begin{aligned} u_3^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\text{sgn}(\cos(\varphi^s - \theta))}{iG_{66}^0} \sqrt{\frac{k_0}{8\pi|\mathbf{x}| |f''(\varphi^s)|}} \\ &\times F(\omega) S^3(\varphi^s) G_{3\alpha 3\beta}^*(\omega) \hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta \\ &\times (k_0 f(\varphi^s) + \tilde{k}^*(\omega)) \exp \left[i k_0 |\mathbf{x}| f(\varphi^s) + i \frac{\pi}{4} \text{sgn}(f''(\varphi^s)) \right] \\ &\times \int_A \Gamma(\mathbf{y}) \exp \left[-i(k_0 f(\varphi^s) + \tilde{k}^*(\omega)) \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right] dV_y \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 φ^s は、 $f'(\varphi^s) = 0$ を満たす解、 $S(\varphi^s)$ は初期波速 c_0 と φ^s に対応する複素波速 $\tilde{c}^*(\varphi^s)$ より、 $S(\varphi^s) = c_0/\tilde{c}^*(\varphi^s)$ である。 $G_{3\alpha 3\beta}^*(\omega)$ は周波数領域の複素緩和関数、 $G_{ij}^0(i, j = 1, \dots, 6)$ は Voigt 表記された初期弾性定数である。 p_β は単位円周上を表すベクトルであり、 $k_0 = \omega/c_0$ である。ここで、式 (4) に対して、 $\mathbf{K} = (k_0 f(\varphi^s) + \tilde{k}^*(\omega))\hat{\mathbf{x}}$ なる空間において、 $\hat{\mathbf{x}}$ に対する変数変換を施す。その後、式 (4) に対し、逆フーリエ変換を用いることで、特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$ は次のように導出される。

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{y}) = & iG_{66}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{\frac{|\mathbf{x}| |f''(\varphi^s)|}{2\pi^3 k_0}} \left(\frac{1}{c_0} f(\varphi) + \frac{1}{\tilde{c}^*(\omega)} \right) \\ & \times \frac{\tilde{u}_3^{sc}(\mathbf{x}, \omega) \exp \left[-ik_0 f(\varphi^s) |\mathbf{x}| - i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(f''(\varphi^s)) \right]}{\text{sgn}(\cos(\varphi^s - \theta)) S^3(\varphi^s) F(\omega) G_{3\alpha 3\beta}^*(\omega) \hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta} \\ & \times \exp \left[i(k_0 f(\varphi^s) + \tilde{k}^*(\omega)) \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \right] d\omega d\theta \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 θ は図 1 における偏角である。特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$ は、空洞内部 D_c でのみ値を持つ関数のため、式 (5) について精度よく計算することで、欠陥形状を再構成することができる。ここで、式 (5) の周波数領域における散乱波 $\tilde{u}_3^{sc}(\mathbf{x}, \omega)$ は、CQBEM で得られた時間領域における散乱波 $u_3^s(\mathbf{x}, t)$ の時間に関するフーリエ変換で求めることができる。

3. 数値解析例

以下、数値解析例を示す。ここで、異方性の性質はオスナイト系鋼材の初期弾性定数 G_{ij}^0 を与えることで考慮し、粘性の性質は三要素標準モデルを用いることで考慮した²⁾。また、対象とする空洞は半径 a とし、境界を 72 個の区分一定要素で分割・離散化した。時間ステップ数を $N = L = 2048$ とし、初期弾性波速度 $c_0 = \sqrt{C_{66}^0/\rho}$ に対し、時間増分を $c_0 \Delta t/a = 0.015$ として与えた。また、粘弾性パラメータは、基準時間 $T_0 = 2a/c_0$ に対し、応力緩和時間 $\tau_\sigma = 0.5T_0$ 、ひずみ緩和時間 $\tau_\epsilon = 17T_0/20$ として与え、緩和定数 G_{3j3l}^R と初期緩和定数 G_{3j3l}^0 の比を $G_{3j3l}^R/G_{3j3l}^0 = 0.85$ で与えた。

図 2(a) - (d) は、オスナイト系鋼材の群速度曲線および異方性・粘弾性体中の空洞周辺における波動場の様子を示している。図 2(a) の群速度曲線は、異方性材料中を伝搬する波動の確認に役立つ。また、図 2(b) - (d) より、異方性・粘弾性体中を伝搬する波動は、時間経過に伴って、粘弾性効果の影響により減衰している様子が確認できる。また、異方性の影響により、散乱波の波面は、図 2(a) 中の qS2 波 (純面外波) に沿って伝搬している様子を確かめる。

図 3(a), (b) に、異方性・粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析結果を示す。ここで、散乱波の観測点 $\mathbf{x}$ は、図 1 において、 $R = 12a$ の円周上に、 $\theta = 5^\circ$ から 10° ずつ、計 36 点で設けられているものとする。図 3(a) では、 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ において、図 3(b) では、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ において観測された

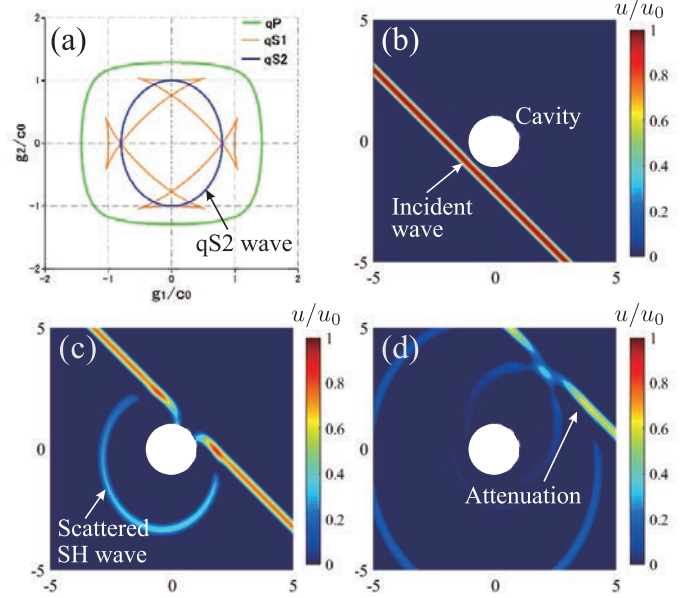


図 2 異方性・粘弾性体中の空洞周辺の波動場の可視化結果 (a) 群速度曲線, (b) $t/T_0 = 0.75$, (c) $t/T_0 = 2.25$, (d) $t/T_0 = 3.75$.

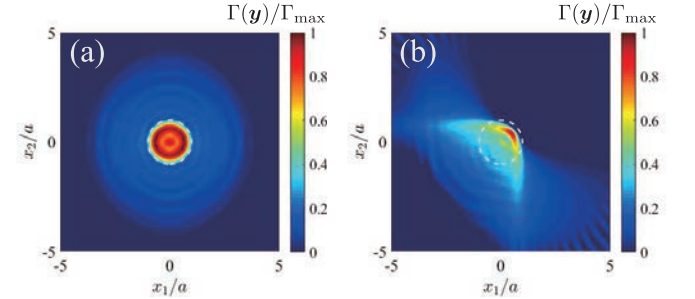


図 3 異方性・粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析結果 (a) 全周方向 ($0^\circ < \theta < 360^\circ$), (b) 1/4 周方向 ($0^\circ < \theta < 90^\circ$).

散乱波を用いて計算された、式 (5) の特性関数 $\Gamma(\mathbf{y})$ を、図 1 中の Imaging area にプロットすることで空洞の再構成結果を示している。また、それぞれの図中の白点線は空洞の正解位置を表している。図 3(a) より、全周方向で散乱波を観測する場合は、異方性・粘弾性の影響下であっても、十分な精度で空洞を再構成できている。また、図 3(b) より、入射波が直接当たる面においては、異方性・粘弾性の影響下であっても、概ね空洞を再構成できることが確認された。

4. おわりに

本研究では、演算子積分時間領域境界要素法を用いた、異方性・粘弾性体中の空洞に対する逆散乱解析を行った。解析例として、単純な空洞を再構成し、本手法の妥当性を示した。今後は、本手法の 3 次元問題への拡張や、高速逆散乱解析法の開発を行う予定である。

参考文献

- 1) 福井卓雄, 岡山美央, 石田貴之: 2 次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算数理工学論文集, Vol.6(2), pp.153-158, 2006.
- 2) 竹田晴彦, 斎藤隆泰, 古川陽, 廣瀬壮一: 2 次元純面外異方性・粘弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法, 計算数理工学論文集, Vol.21, pp.9-16, 2021.
- 3) Kitahara, M., Nakahata, K. and Hirose, S.: Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws, Wave motion, Vol.36, pp. 443-455, 2002.