

安定化有限要素法による瀬戸内海の津波解析

中央大学 学生会員 ○ 鶴藤 優太
中央大学大学院 学生会員 中村 光太郎
中央大学 正会員 榎山 和男
(株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史

1. はじめに

近年、南海トラフ地震の到来が懸念されており、それに伴う津波の被害が想定されている。瀬戸内海においては、津波対策が十分でなく堤防が低く設計されているところも数多く存在する。近年のコンピュータ性能の飛躍的な発達に伴い、津波に対する安全性の評価を数値シミュレーションにより行うことが一般的である。数値解析手法として、有限要素法は任意形状への適合性に優れるため、瀬戸内海のような複雑な解析領域への適用には有効である。

そこで本報告では、瀬戸内海に侵入する津波の挙動を解析するために、瀬戸内海全域および太平洋沖においてメッシュ作成を行い、安定化有限要素法を用いて津波解析を行った。

2. 数値解析手法

(1) 非線形長波方程式

非線形長波理論に基づく支配方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}) + \mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (1)$$

ここで、各ベクトル、各マトリックスは以下に示す通りである。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ u_1 H \\ u_2 H \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \\ c^2 - u_1^2 & 0 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{11} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u_1 & 2 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{12} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{21} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{22} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \\ -2u_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} \end{bmatrix}, C_f = \frac{gn^2}{H^{\frac{1}{3}}}$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は未知ベクトル $\mathbf{R}$ は勾配ベクトル、 $\mathbf{A}_i$ は移流行列、 $\mathbf{N}_{ij}$ は拡散行列、 $\mathbf{G}$ は摩擦行列、 H は全水深、 u_i は各方向の流速、 c は波速、 z は河床高さ、 g は重力加速度、 ν_e は渦動粘性係数、 n はマンニングの粗度係数、 C_f は摩擦係数である。

3. 離散化

(1) 空間方向の離散化

空間の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いる¹⁾。式 (1) に対して SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用すると以下の弱形式が得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{R} \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\mathbf{N}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\mathbf{A}_i)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{G}\mathbf{U} - \mathbf{R} \right) d\Omega_e$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) d\Omega_e = 0 \quad (2)$$

ここで、SUPG 項の安定化パラメータを以下のように与える。

$$\tau_{SUPG} = \left(\frac{1}{(\tau_{SUGN1})^2} + \frac{1}{(\tau_{SUGN2})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} \left(c |\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_{\alpha}}| + |u_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_{\alpha}}| \right) \right)^{-1}$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}$$

$$\delta = \tau_{SHOC} (||u_{\alpha int}||)^2, \tau_{SHOC} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} |u_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_{\alpha}}| \right)^{-1}$$

$$||u_{\alpha int}|| = ||u_{\alpha}||$$

ここで、 Δt は微小時間増分量、 N は形状関数、 n_{en} は要素を構成する節点の数である。

式 (2) の補間に三角形一次要素を用いると、空間に離散化された半離散化方程式 (3) を得る。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\tau}) \dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{S} + \mathbf{S}_{\tau}) \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U}$$

$$+ (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\tau}) \mathbf{U} + (\mathbf{H} + \mathbf{H}_{\tau}) \mathbf{R} + \mathbf{T} \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{U}$ は未知ベクトル、 $\mathbf{S}$ は移流行列、 $\mathbf{K}$ は拡散行列、 $\mathbf{F}$ は摩擦行列、衝撃捕捉 $\mathbf{H}$ は勾配行列、 $\mathbf{R}$ は勾配ベクトル、添字 τ は SUPG 法に起因する行列である。

KeyWords : 安定化有限要素法, 津波, 瀬戸内海

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL : 03-3817-1815 E-mail : a18.y5yc@g.chuo-u.ac.jp

(2) 時間方向の離散化

時間方向の離散化には有限差分法を用いる． $n + \theta$ ステップ ($0 \leq \theta \leq 1$) で式 (3) を満足することを考えると，以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}^{n+\theta} &= \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} \\ \mathbf{U}^{n+\theta} &= \theta \mathbf{U}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{U}^n\end{aligned}$$

本報告では， $\theta = 0.5$ の Crank-Nicolson 法で離散化を行う．

4. 数値解析例

数値解析例として，瀬戸内海全域における津波解析を行う．

(1) メッシュ作成手法

津波解析に用いるメッシュは水深に応じて変化する波長に対して適切な分割を行う必要がある．具体的には，水深の浅いところでは密なメッシュが生成され，水深が深くなるにつれて疎なメッシュが生成される．このように，水深に応じたメッシュ分割が必要となる．

そこで本報告では，クーラン数 Cr が一定になるように新節点を発生させる手法²⁾で水深に応じた疎密づけを行った．ここでクーラン数は以下の式で与えられる．

$$Cr = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4)$$

ここで， c は長波の波速， Δt は単位時間増分量， Δx は代表的要素幅である．クーラン数を 1 と仮定した際に得られる Δx は， $c = \sqrt{gh}$ を用いることで，要素サイズ関数 F_p として以下の式で表される．

$$F_p = \Delta t \sqrt{gh} \quad (5)$$

g は重力加速度， h は静水深を表し，これにより得られた要素サイズ関数 F_p を基準として新節点を発生させる．作成されたメッシュが図-1 に示すもので，節点数が 307169，要素数が 595141，最小要素幅は 150m である．

(2) 解析条件

解析領域は図-1 に示す領域で，図-2 に示す解析メッシュを用いる．本報告では初期条件として，図-3 に示すように南海トラフ地震における，四国沖に大すべり域を設定した断層パラメータ (ケース 4) を参照³⁾ し，Manisinha & Smylie の方法により算出し，初期波形として利用する．また，境界条件として，図-1 に示すように沖合である赤線部，緑線部には開境界条件として以下のように与える．

$$u_1 = \eta \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (6)$$

$$u_2 = -\eta \sqrt{\frac{h}{g}} \quad (7)$$

また，海岸線の境界には non-slip 条件を与える．ここで， η は水変動量である．

(3) 解析結果

結果は講演時に示す．

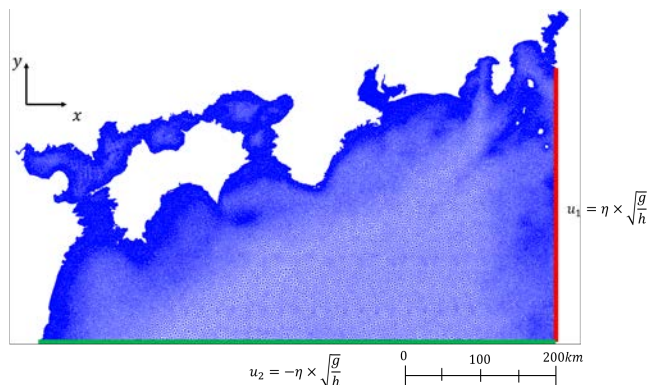


図-1 広域の解析メッシュ

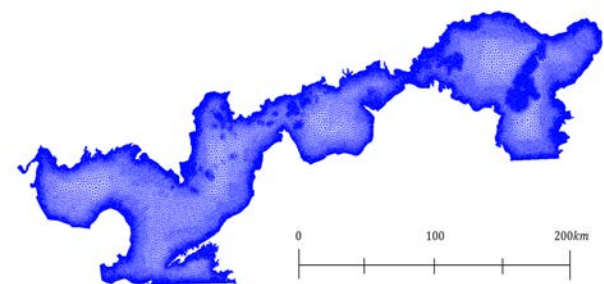


図-2 解析メッシュ (瀬戸内海部)

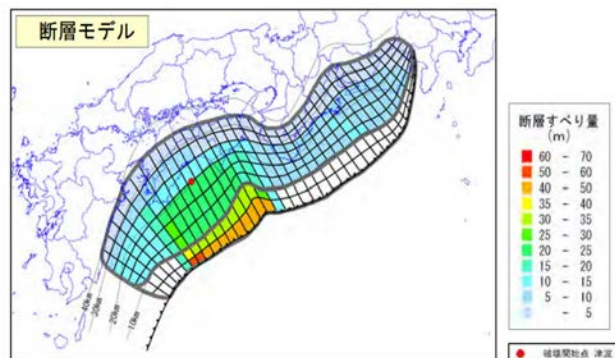


図-3 断層パラメータ (ケース 4)

5. おわりに

本報告では，瀬戸内海に侵入する津波の挙動を解析するために，安定化有限要素法を用いて津波解析を行った．

今後は，様々な津波の初期波形で解析を行い瀬戸内海における津波の危険性を検証する予定である．

参考文献

- 1) T.E.Tezduyar : Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. advance in Applied Mechanics, 28.1-44.1991
- 2) 樋口 誠，梶山 和男，岡田 毅 : 複雑な境界形状を有する領域内の水面波動解析のための最適自動分割法，土木情報システムシンポジウム講演集，pp61-64. 1991
- 3) 内閣府 : <http://www.bousai.go.jp/jishin/nankai/model/index.html/> (2022 年 1 月閲覧)