空洞が存在する土壌内の浸透流に関する解析解の導出

中央大学　学生会員　○岡田　和晃
中央大学　フェロー会員　山田　正

1. はじめに

土壌内に空洞が存在する場合における浸透流について知ることは，降雨流出機構や地下水流れを解析する上で非常に重要である. 例えば佐藤ら[1)]は飽和土中に開けられた井戸が周りの流速場に与える影響を定量的に評価することを目的として，流速場に関してポテンシャル理論と等角写像を用いて解析を行い，理論と実験の比較を行った. 佐藤ら[1)]は井戸の内部にも流れが生ずる条件で Helle-Shaw 流れ実験及び数値計算を行い，井戸内の流速は井戸外の一様流速の 2 倍となること，円井戸の中心から半径の 2 倍程度離れたところの流線が井戸内に引き込まれていること，一様流に垂直な細長い楕円井戸において井戸内の流速は楕円が細くなるほど正円の場合より遅くなり，楕円井戸の厚み比(=短軸長/長軸長)が小さくなるにつれ井戸内の流速が井戸外の一様流速に漸近することを示した. 本研究において筆者らは，土壌内に空洞が存在し，空洞内部には流れが生じない場合の浸透流について，流線の形状および空洞への流入量を明らかにするため，連続式とダルシー則を基礎方程式とし，ポテンシャル理論に基づいた土壌内の流れに関する解析解を導出した.

2. 基礎方程式

本研究では，**図−1** に示す正円の空洞が存在する土壌中の水平な流れについて解く. 基礎方程式として式(1)に示す連続式と式(2)に示すダルシー則を用いる.

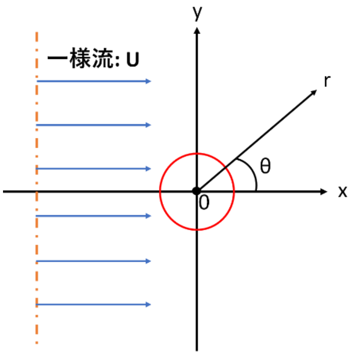
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$u=-ki_x, v=-ki_y \tag{2}$$

ここに u : x 方向の流速, v : y 方向の流速,

k : 透水係数, i_x : x 方向の動水勾配, i_y : y 方向の動水勾配とする. 式(2)において i_x, i_y をピエゾ水頭を用いて表すと式(3)を得る. ここで z : 位置水頭, ρ :水の密度,

$$i_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right), \quad i_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right) \tag{3}$$



図−1　空洞が存在する土壌中の流れ場

g : 重力加速度, p : 圧力とする.

k は常に一定とし，地下水の流速は非常に遅いことから渦はないとすると，式(2), 式(3)を式(1)に代入して式(4)を得る.

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0$$

$$\text{または}\quad \nabla^2\phi(x,y)=0, \quad \left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

ここで $\phi(x,y)$: 流れの速度ポテンシャルとする.

また，地盤内に一様な流れが存在する場に，空洞が存在することによって $\phi(x,y)$が変化すると考えると，**図−1** における $\phi(x,y)$は式(5)のように表せる.

$$\phi(x,y)=-Ux+k\phi_a+\phi_b(x,y) \tag{5}$$

なお U: 一様流の流速, ϕ_a: 空洞の中心から地表面までの距離, ϕ_b:空洞の存在による速度ポテンシャルとする.

3. 解析解の導出

式(5)の右辺第 3 項について，極座標系で表し変数分離を行うと式(6)のように表せる.

$$\phi_b(x,y)=\phi_b(r,\theta)=R(r)T(\theta) \tag{6}$$

式(6)を式(4)に代入することで式(7)を得る.

$$\nabla^2\phi_b(r,\theta)=\frac{1}{R(r)}\left(r\frac{dR(r)}{dr}+r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}\right)+\frac{1}{T(\theta)}\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}(=0) \tag{7}$$

キーワード　地下水, ダルシー則,　ポテンシャル理論
連絡先　〒112-8551　東京都文京区春日 1-13-27　中央大学理工学研究科　TEL : 03-3817-1805　E-mail : a15.fchg@g.chuo-u.ac.jp

式(7)の右辺第 1 項及び右辺第 2 項について, n^2 という定数を用いて式(8)及び式(9)の様に表せる.

$$r\frac{dR(r)}{dr}+r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}=n^2R(r) \tag{8}$$

$$\frac{d^2T(\theta)}{d\theta^2}=-n^2T(\theta) \tag{9}$$

式(8)及び式(9)を解くことで, 式(10)を得る.

$$\phi_b(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)(c_nr^n+d_nr^{-n})+(a_0\theta+b_0)(c_0\log r+d_0) \tag{10}$$

なお, a_n, b_n, c_n, d_n, a_0, b_0, c_0, d_0 : 任意の数列とする.

この時 ϕ_b には 4 つの境界条件が考えられる.

i) ϕ_b の有界性より, 空洞から無限に遠い地点では流れや空洞の影響が生じないとすると, $r\to\infty$ すなわち r_∞ で $c_n=0$

ii) 空洞は x 軸回りで対称なので, $b_n=0$, $a_0=0$

iii) 空洞の円周上での圧力は大気圧に等しく, 空洞の半径を a とすると $\phi_b(a, \theta)=0$

iv) i)より r_∞ において, $\phi(r_\infty, \theta)=k\,\phi_a$

式(10)において境界条件 i), ii)を考慮すると, 式(5)は極座標系を用いて以下の様に表すことができる.

$$\phi(r,\theta)=-Ur\cos\theta+k\phi_a+\sum_{n=1}^{\infty}a_nd_nr^{-n}\cos n\theta+b_0d_0+b_0c_0\log r \tag{11}$$

式(11)において境界条件 iii)を考慮すると, 式(12)を得る.

$$\phi(r,\theta)=-U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+k\phi_a+b_0d_0+b_0c_0\log r \tag{12}$$

式(12)において境界条件 iv)を考慮すると, 式(13)を得る.

$$\phi(r,\theta)=-U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+k\phi_a\frac{\log\frac{r}{a}}{\log\frac{r_{\max}}{a}} \tag{13}$$

式(13)を極座標系から直交座標系に書き直すと, 式(14)を得る.

$$\phi(x,y)=-U\left(x-\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right)+k\phi_a\frac{\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}{\log\frac{r_{\max}}{a}} \tag{14}$$

式(14)より, 式(15), 式(16)に示す x, y 方向の流速 u, v が得られ, また式(17)のように流れ関数 $\Psi(x,y)$ を得る.

また, 式(14)を基に描画した流線が**図-2** である.

なお計算条件として, U=1[m/day], k=1[m/day], ϕ_a=100[m], a=10[m], $r_\infty=10^{20}$[m]とする.

$$u=-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}=U\left(1+\frac{2a^2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)+\frac{k\phi_ax}{(x^2+y^2)(\log\frac{a}{r_{\max}})} \tag{15}$$

$$v=-\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}=\frac{2a^2Uxy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{k\phi_ay}{(x^2+y^2)(\log\frac{a}{r_{\max}})} \tag{16}$$

$$\psi(x,y)=\int_{-\infty}^{y}udy=Uy+\frac{Ua^2y}{x^2+y^2}+\frac{k\phi_a\tan^{-1}(\frac{y}{x})}{\log(\frac{a}{r_{\max}})} \tag{17}$$

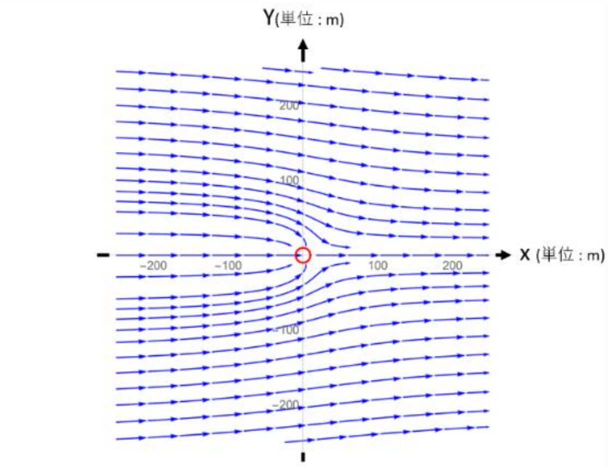


図-2. 式(11)より描画した流線

4. まとめと展望

本研究において筆者らは, 連続式とダルシー則及びポテンシャル理論を用いて浸透流に関する解析解を導出し, 空洞が存在する土壌内における流れ場を示した. **図-2** より, 空洞に引き込まれる一様流の幅は約 100m で, 空洞の半径の 10 倍程度となり, 佐藤らの結果に比べ 2 倍以上大きくなった. 今後は様々な条件下で実験を行い, 実際の流れ場における空洞に引き込まれる一様流の幅や流量を計測し解析解との比較を行う.

参考文献

1) 佐藤智宏, 江花亮, 山田正 : 一様流中に置かれた井戸が周りの流速場に与える影響, 水文・水資源学会研究発表会要旨集, 第 20 回, 2007