

二次元弾性体の動的解析における陽解法と陰解法の比較

中央大学 学生員 ○石塚 啓起
中央大学大学院 学生員 吉田 也真都
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

地震大国である日本にとって、構造物に対する動的解析を行うことは防災の観点から重要である。弾性体の動的解析では、時間の離散化手法として陽解法または陰解法が用いられる。陽解法では、1ステップあたりの計算量が少なく、大規模な計算に有利となるが、計算を安定的に行うためのクーラン条件が課せられており、時間増分 Δt を大きく取ることができない。陰解法では、無条件安定となるため時間増分 Δt を大きく取ることができ一方で、連立一次方程式を直接解くため、1ステップあたりの計算量が多くなる。

そこで本報告では、二次元片持ち梁の衝撃問題を取り上げ、陽解法では中心差分法、陰解法ではニューマークの β 法でそれぞれ解析を行い、要素幅、時間増分の変更に伴う精度検証並びに計算時間について比較を行う。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

固体の動的なつり合い問題における支配方程式は、以下に示す応力のつり合い方程式、ひずみ-変位関係式、応力-ひずみ関係式である。

$$\partial^T \sigma - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\epsilon = \partial \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon \quad (3)$$

ここで、式(1)における σ は応力、 ρ は密度、 $\mathbf{b}$ は単位体積当たりに作用する物体力であり、式(3)の $\mathbf{D}$ は弾性係数行列である。また、弾性体の領域 Ω の境界 Γ には以下のように境界条件が与えられる。

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_u \quad (4)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_\sigma \quad (5)$$

式(1)に仮想仕事の原理を適用し、幾何学的境界条件(4)および力学的境界条件(5)を考慮すると、最終的に動的問題に対する支配方程式の弱形式は総和規約表記で以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\partial \mathbf{u}^*)^T \mathbf{D} (\partial \mathbf{u}^*) dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} dV \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{u}^{*T} \bar{\mathbf{t}} dS \end{aligned} \quad (6)$$

そして、式(6)に空間の離散化を行うことで、以下の有限要素方程式を得る。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (7)$$

ここで、式(7)における $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{K}$ は剛性行列である。なお、本報告では減衰は考慮しない。

(2) 時間の離散化

時間に関する離散化の手法として、陽解法である中心差分法と陰解法であるニューマークの β 法を用いる。

a) 陽解法(中心差分法)

テーラー展開を用いて、速度 $\dot{\mathbf{u}}^n$ と加速度 $\ddot{\mathbf{u}}^n$ は以下のよう求めることができる。

$$\dot{\mathbf{u}}^n = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}) \quad (8)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^n = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) \quad (9)$$

中心差分法により、時間に関して離散化された方程式は以下のように表すことができる。

$$\frac{1}{\Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F}^n - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} \right) \mathbf{u}^n - \frac{1}{\Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} \mathbf{u}^{n-1} \quad (10)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{M}}$ は集中化質量行列である。また、陽解法の安定条件は CFL 条件より、以下のように与えられる。

$$C_r = \alpha_i \frac{c \Delta t}{h} \leq 1 \quad (11)$$

ここで、 C_r はクーラン数であり、 α_i は係数、 Δt は時間増分、 c は物理量の伝播速度、 h は最小要素幅である。

b) 陰解法(ニューマークの β 法)

ニューマークの β 法では、変位と速度を以下のように仮定している。

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \, 2\beta \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (13)$$

ここで、 γ と β はパラメータであり、通常 $\gamma = \frac{1}{2}$ としている。また、 β には以下のような制約がある。

$$0 < \beta < \frac{1}{2}$$

なお、本報告では $\beta = \frac{1}{4}$ 、 $\gamma = \frac{1}{2}$ を用いる。これらを踏まえて、変位を先に求める場合、時間ステップ $n+1$ における変位を未知数とする次の代数方程式を解く。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u}^{n+1} \\ &= \mathbf{F}^{n+1} + \mathbf{M} \left\{ \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}^n \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)を解くことにより、 Δt 時間後の時間ステップ $n+1$ における変位が求められる。

KeyWords: 有限要素法, 陽解法, 陰解法

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL: 03-3817-1815 E-mail a17.f7nn@g.chuo-u.ac.jp

3. 数値解析例

数値解析例として二次元片持ち梁の衝撃問題を取り上げる。片持ち梁の先端から速度関数 $\dot{u} = A \sin(\pi \frac{t}{T})$ で与え、固定端における応力の伝播を求め、両手法の解析結果を比較する。ここで、速度関数における A は速度で 0.1m/s とし、 t はステップにおける時間、 T は周期を与える時間を表す。周期は 0.001s まで与える。また、応力の伝播速度は理論式より 10^3m/s となり、陽解法において時間増分 Δt の最大値は式 (11) より、 10^{-4}s となる。

(1) 解析条件

解析条件は図-1 に示す通りである。メッシュ 1,2,3,4 は半波長 (1m) をそれぞれ 2 分割, 4 分割, 8 分割, 16 分割したものである。また、ヤング率は $1.0 \times 10^{11}\text{N/m}^2$, ポアソン比は 0.3, 密度は 10000kg/m^3 で解析を行う。

(2) 解析結果

時間増分 $\Delta t = 10^{-6}$ に固定して、メッシュ 1~4 で解析を行った場合の応力の伝播の様子を図-2 に示す。図より、要素分割が粗くなると陽解法、陰解法ともに数値振動が生じ、振幅は減衰することが分かる。また、同じメッシュでの比較では、陽解法に比べて陰解法の方が高精度であり、数値振動も小さい。陽解法で陰解法と同程度の精度を得るためにはメッシュ幅を半分以下にする必要がある。

次に、メッシュ 4 を用いて、時間増分を変化させた結果を図-3 に示す。図より、陰解法および陽解法ともに、安定な微小時間増分を用いた場合には、計算結果に有意な差異が生じないことが分かる。また、陽解法は $\Delta t = 10^{-4}$ の場合は、安定な解は得られなかった。両手法において、各メッシュごとに取得可能な最大の時間増分とそのときのクーラン数をまとめたものを図-4 に示す。図より、陽解法は、メッシュサイズに比例して小さくなるが、陰解法はメッシュサイズの影響を受けずにほぼ一定となる結果となった。

4. おわりに

本報告では、二次元片持ち梁の衝撃問題を取り上げ、陽解法と陰解法を比較することで以下の結論を得た。

- 陰解法と陽解法の比較では、同じメッシュを分割の場合には、陰解法の方が高精度である。また、陽解法で陰解法と同程度の精度を得るためにはメッシュ幅を半分以下にする必要がある。
- 陰解法と陽解法の安定性の比較では、陽解法は、メッシュサイズに比例して小さくなるが、CFL 条件の係数を $\alpha_i \leq 0.670$ で安定な結果が得られた。一方、陰解法はメッシュサイズの影響を受けない結果となった。

今後の課題として、計算時間や記憶容量について比較を行う予定である。

参考文献

- 1) 日本計算工学会編： 竹内則雄, 樫山和男, 寺田賢二郎, 計算力学 第2版 有限要素法の基礎, 森本出版株式会社, 2017 年。
- 2) 土木学会： いまさら聞けない計算力学の常識, 丸善株式会社, 2008 年。

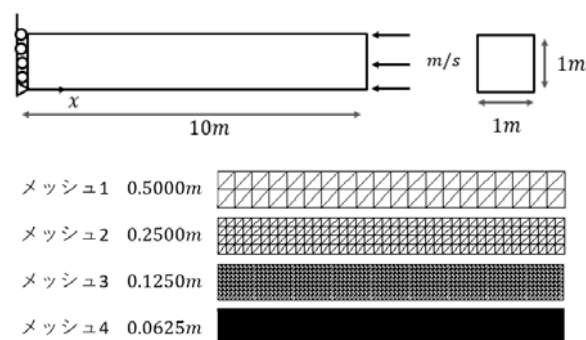


図-1 解析条件と解析メッシュ

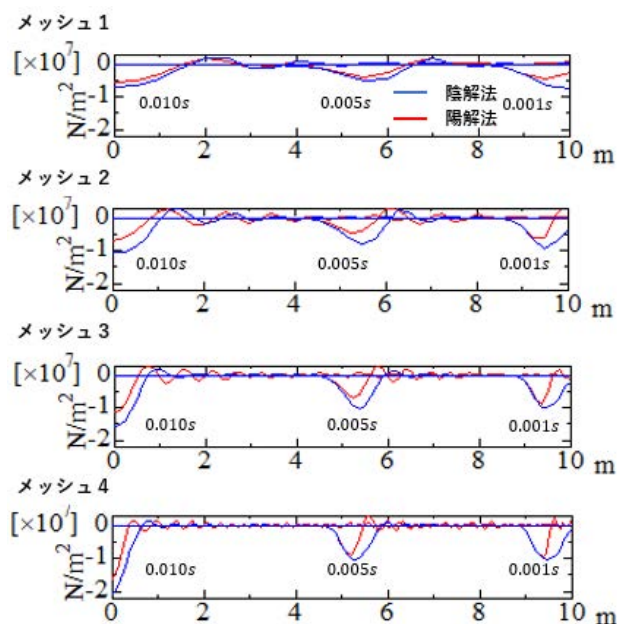


図-2 $\Delta t = 10^{-6}$ 時の伝播する応力

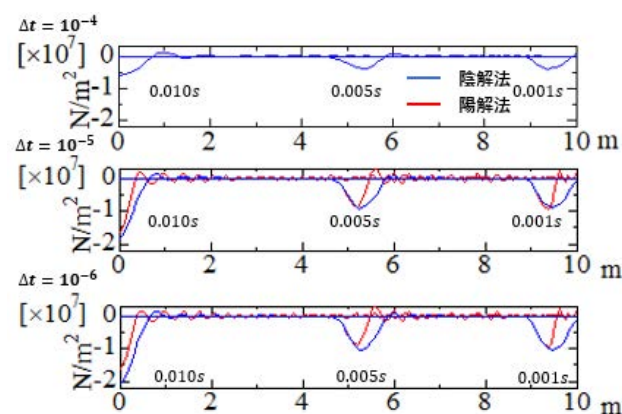


図-3 メッシュ 4 の伝播する応力

メッシュ	陽解法	陰解法
1	3.70000×10^{-4} (0.740)	9.95000×10^{-4} (1.990)
2	1.70000×10^{-4} (0.680)	9.97500×10^{-4} (3.990)
3	8.50000×10^{-5} (0.680)	9.98750×10^{-4} (7.990)
4	4.18750×10^{-5} (0.670)	9.99375×10^{-4} (15.99)

図-4 陽解法及び陰解法における取得可能な最大の時間増分 (クーラン数)