3次元自由表面流れ解析における解析メッシュの依存性について

中央大学 学生員 ○ 安井 太一
中央大学 正会員 樫山 和男
中央大学大学院 学生員 吉田 也真都

1. はじめに

河川構造物や海洋構造物に対する流体力の評価は防災の観点からも重要であり，その予測には Navier-Stokes 方程式に基づく自由表面流れ解析が一般に用いられている．自由表面流れの解析手法には，界面を直接表現する界面追跡法と，界面関数により間接的に表現する界面捕捉法がある．

本研究では，界面捕捉法の一種である VOF 法[1] に着目し，任意形状への適応性に優れた有限要素法を用いた3次元自由表面流れ解析を行い，有限要素分割の違いが解に与える影響について実験結果との比較のもと検証した．

2. 数値解析手法

(1) 密度, 粘性係数の計算

VOF 法は，自由表面位置を VOF 関数と呼ばれるスカラー関数 ϕ により表現する手法である．VOF 関数 ϕ は各節点において，液体であれば 1.0，自由表面上であれば 0.5，気体であれば 0.0 の値をとる関数であり，気体と液体の密度，粘性係数は，VOF 関数 ϕ を用いてそれぞれ以下のように表現される．

$$\rho = \rho_l \phi + \rho_g (1-\phi) \tag{1}$$

$$\mu = \mu_l \phi + \mu_g (1-\phi) \tag{2}$$

ここで，ρ，μ は各要素における密度と粘性係数で，ρ_l，ρ_g，μ_l，μ_g はそれぞれ液体の密度，気体の密度，液体の粘性係数，気体の粘性係数である．

(2) 流速, 圧力の計算

非圧縮性粘性流れの支配方程式として Navier-Stokes 方程式 (3) と非圧縮流体の連続式 (4) の二つの方程式を用いる．

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{4}$$

ここで，Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域であり，u_i は流速，p は圧力である． Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件は，それぞれ式 (5)，(6) のように示す．

$$u_i = g_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{g}} \tag{5}$$

$$\left(-p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) n_j = h_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{h}} \tag{6}$$

ここで，Γ_g，Γ_h はそれぞれ Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件が与えられる境界を表し，g_i，h_i はそれぞれ境界上での流速とトラクション，δ_{ij} は Kronecker のデルタ，n_j は外向き単位法線ベクトルを表す．

方程式 (3), (4) に対し，空間方向に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法，時間方向に Crank-Nicolson 法を適用し離散化を施すと，以下の有限要素方程式を得る．

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}+\mathbf{M}_S)\frac{\mathbf{u}_i^{n+1}-\mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + (\mathbf{A}+\mathbf{A}_S)\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_i^{n+1}+\mathbf{u}_i^n\right) \\ -(\mathbf{G}_i-\mathbf{G}_{Si})\mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{D}_{ij}\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_i^{n+1}+\mathbf{u}_i^n\right) \\ +\mathbf{S}_C\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_i^{n+1}+\mathbf{u}_i^n\right) = 0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_j\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{M}_{Pj}\frac{\mathbf{u}_j^{n+1}-\mathbf{u}_j^n}{\Delta t} \\ +\mathbf{A}_{Pj}\frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_j^{n+1}+\mathbf{u}_j^n\right) + \mathbf{G}_P\mathbf{p}^{n+1} = 0\end{aligned} \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{M}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{G}$，$\mathbf{D}$，$\mathbf{S}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ時間微分項，移流項，圧力項，粘性項，衝撃捕捉項, 連続項の係数行列を表す．添字 S，P, C は SUPG 項，PSPG 項, 衝撃捕捉項に起因する行列である．この連立一次方程式を GPBi-CG 法を用いて解き，未知数である流速と圧力を求めた．

(3) 自由表面の位置の計算

界面関数の支配方程式は移流方程式 (9) を用いる．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{9}$$

初期条件は以下のようになる

$$\phi = \phi_0 \quad \text{at} \quad \mathrm{t} = 0 \tag{10}$$

ここで，u, ϕ_0 はそれぞれ流速，VOF 関数の初期値である．u は式 (7),(8) を解くことで得られる値を用いる．

方程式 (9), (10) に対し，空間方向に SUPG 法に基づく安定化有限要素法，時間方向に Crank-Nicolson 法を適用し離散化を施すと，以下の有限要素方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\{\mathbf{M}+\mathbf{M}_S\}\phi^{n+1} + \frac{1}{2}\{\mathbf{A}+\mathbf{A}_S\}\phi^{n+1} \\ = \frac{1}{\Delta t}\{\mathbf{M}+\mathbf{M}_S\}\phi^n - \frac{1}{2}\{\mathbf{A}+\mathbf{A}_S\}\phi^n\end{aligned} \tag{11}$$

このようにして離散化を行い導かれた式 (11) は連立一次方程式であり，これを反復法である Bi-CGSTAB 法を用いて解くことにより未知量である VOF 関数が求まる．

(4) 流体力の計算

流れ場における支配方程式 (3),(4) に対し，Galerkin 法に基づいた重み付き残差法を適用し，圧力項と粘性項に対

KeyWords： VOF 法，安定化有限要素法，自由表面流れ，構造格子，非構造格子

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL : 03-3817-1815 E-mail @g.chuo-u.ac.jp

して部分積分を施すことにより，以下の弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega^0} w_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f_i \right) d\Omega - \int_{\Omega^0} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} p d\Omega + \int_{\Omega^0} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega^0} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Gamma_{in}} w_i - p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma \qquad (12)$$

ここで，Ω^0,Γ_{in} は構造物周りの領域と構造物の境界を表す．式 (12) の右辺の積分項が構造物にはたらく流体力 (抗力) となる．式 (7), 式 (8) を解いて得た流速と圧力を式 (12) に代入することにより，構造物にはたらく流体力が求められる．

3. 数値解析例

本研究では，図-1 に示すように角柱構造物を有する 3 次元ダムブレイク問題[2)]を取り上げる．

(1) 解析条件

境界条件としては側壁, 天井, 底，角柱において slip 条件を課した．解析メッシュは，表-**1** に示すように構造格子，非構造格子についてそれぞれ 2 通りのメッシュ幅で解析を行い，流体力を計算して実験結果と比較した．

(2) 解析結果

解析結果として, 図-**2** にメッシュ 1, 3 の時間 $t = 0.3, 0.4s$ での圧力図，図-**3** に角柱にかかる x 方向応力を示す．メッシュ 2, メッシュ 4 については講演時に示す．これらの結果から以下のことが確認できた．

- 図-**2** から，定性的に良く流体の挙動を表せていると言える
- 構造格子，非構造格子のどちらのメッシュにおいても，時刻歴において実験結果との差異がみられた．
- 流体力 (抗力) の最大値について，構造格子であるメッシュ 1 の方が非構造格子であるメッシュ 3 に比べ実験結果と近い値が得られた．

4. おわりに

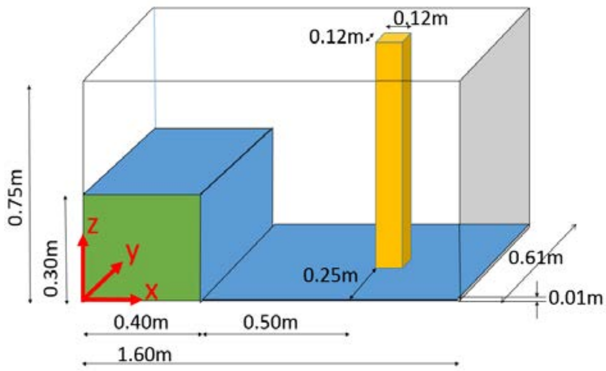
本報告では，VOF 法に基づく有限要素法を 3 次元自由表面流れ解析に適用し，有限要素分割の違いが解に与える影響について実験結果との比較のもとに検討した．その結果，ほぼ同じ要素分割幅のメッシュを用いる場合，構造格子の方が非構造格子に比べ抗力値が実験結果と近い流体力の最大値を得ることができた．ただし，いずれの場合も計算結果の方が，実験結果に比べて早く波が到達する結果となった。

今後は，より詳細な検討を行う予定である．

参考文献

1) Hirt, C.W.& Nichols, B.D.:Volume of fluid method for dynamics of free boundaries,*J. Comp. Phys*, 39, (1981), 201-225

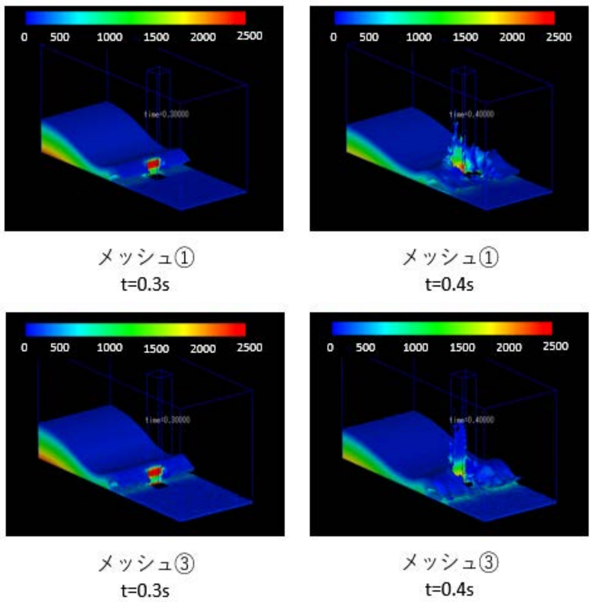
2) Gomez-Gesteira, M. Dalrymple, R.A. : Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on tall structure, journal of waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 130, (2003), 63-69



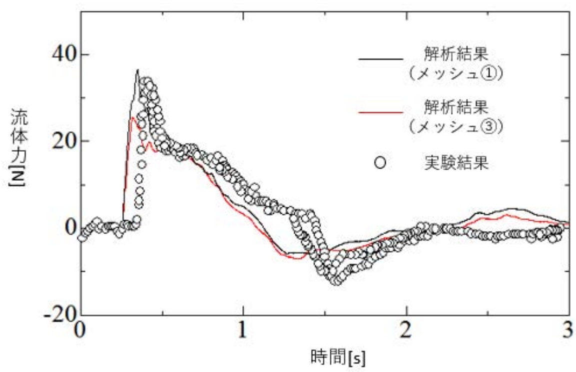
図－1 解析モデル，初期条件

	平均要素幅[m]	節点数	要素数
メッシュ①（構造格子）	0.0126	749436	4327200
メッシュ②（構造格子）	0.0063	5882054	34617600
メッシュ③（非構造格子）	0.0123	787371	4608998
メッシュ④（非構造格子）	0.0062	6229380	36886802

表－1 解析メッシュ



図－2 t=0.3, 0.4s での圧力図



図－3 角柱に働く流体力（x 軸方向）