

IGA によるポテンシャル流れ解析のメッシュ依存性の検討

中央大学大学院 学生員 ○ 吉田 也真都
中央大学 正会員 檜山 和男
日本大学 正会員 長谷部 寛

1. はじめに

土木構造物の設計には一般的に CAD が用いられているが、従来の有限要素法では CAD の Spline 関数により得られる形状モデルを、有限要素法で用いる関数で近似した上で、解析メッシュを作成し解析を行っていた。そこで近年、Spline 関数を形状関数に用いることで、CAD で得られる形状モデルのメッシュ生成、そして有限要素解析までをシームレスに行うことが可能な IGA¹⁾²⁾ (Isogeometric Analysis) が注目されている。

本研究では、Spline 関数の一種である NURBS 関数を形状関数に用いて、IGA を二次元及び三次元ポテンシャル流れ解析に適用し、ノットの方向に関する解析メッシュの依存性について検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) NURBS

形状関数に用いる NURBS 関数について述べる前に NURBS 関数の基本となる B-Spline 基底関数について述べる。B-Spline 基底関数は式 (1) より決定される。

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (p=0)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

ここで、 i は制御点の番号、 p は B-Spline 基底関数の次数、 ξ_i はパラメータ空間の座標であるノットを表す。ノットとは B-Spline 基底関数を決定するパラメータで、そのノットの並び、 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ をノットベクトルという。このノットベクトルは CAD で描いた形状から得られる数列である。式 (1) を用いて IGA で解析領域を表現する NURBS 曲面、形状関数となる NURBS 基底関数は式 (2)、式 (3) のように表される。

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (2)$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{i,j}$ は制御点、 $w_{i,j}$ は各制御点の重みを表す。

(2) 離散化

IGA による二次元ポテンシャル解析の離散化について記す。基本的な解析手順は従来の有限要素法と同様で、支配

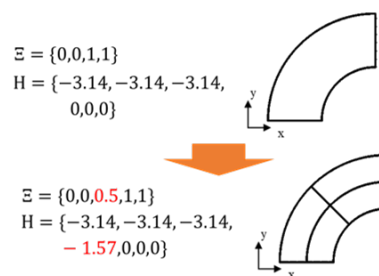


図-1 ノットの挿入による要素の細分化

方程式である Laplace 方程式 (4) に対して重み付き残差法を適用し、各要素での弱形式に対して、式 (5)、(6) を用いてポテンシャルと重み関数を補間する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$\phi_e(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{e_I}(\xi, \eta) \phi_I \quad (5)$$

$$\phi_e^*(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{n_{en}} R_{e_I}(\xi, \eta) \phi_I^* \quad (6)$$

ここで、 n_{en} は要素を構成する制御点の数、 R_e は制御点における NURBS 基底関数、 I は制御点の番号である。NURBS 関数により補間を行うと式 (7) を得ることができる。

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial R_{e_I}}{\partial x} \frac{\partial R_{e_J}}{\partial x} + \frac{\partial R_{e_I}}{\partial y} \frac{\partial R_{e_J}}{\partial y} \right) d\Omega \phi_{e_J} = - \int_{\Gamma_e} R_{e_I} q d\Gamma \quad (7)$$

ここで、 Ω_e は要素領域、 Γ_e は要素境界、 q は要素境界に対する外向き法線方向の流速である。このとき、NURBS 関数は物理空間の関数ではなく、パラメータ空間の関数であるので、物理空間からパラメータ空間へ変数変換を施す必要がある。そして、積分を親要素で行うためにパラメータ空間から親要素にもう一度変数変換を施し、Gauss 求積法によって左辺行列、右辺ベクトルを作成する。

(3) ノットの挿入

本研究ではメッシュの依存性を検討するにあたり、ノットの挿入によって要素の細分化を行った。IGA では要素がノットベクトルの非ゼロ区間によって定義される。そのため、CAD 上で描いた形状に対してノットの挿入を施すことにより要素を細分化することができる。ここで図-1 に四分

KeyWords : IGA, ポテンシャル流れ解析, NURBS

連絡先 : 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email : a16.yhft@g.chuo-u.ac.jp

の一円に対して、 η 両方向のノットベクトルに対してそれぞれ中間にノットを挿入した例を示す。ノットを挿入することで非ゼロ区間が1から4になり、1要素だった四分の一円が4要素に細分化された。このようにノットを挿入することで形状を維持したまま、要素を細分化できる。

3. 数値解析例

二次元ポテンシャル流れ解析を取り上げる。

(1) 解析条件

解析領域は図-2の左に示す四分の一円の領域で、円の直線部に Dirichlet 境界条件、曲線部に Neumann 境界条件を与える。図-2の右に解析領域を表現する CAD データを記す。これはノットの挿入を施す前のデータで、NURBS 基底関数の次数は ξ 方向が一次、 η 方向が二次、要素数は1である。図-3に示すよう、ノットの挿入を行う前のメッシュ (a)、ノットの挿入を行ったメッシュ (b)~(e)、比較対象として三角形一次の有限要素メッシュ (f) (要素幅約 0.1m) で解析を行い、結果の比較を行う。

(2) 解析結果

図-4に各メッシュにおける解析結果を示す。この図から、いずれのメッシュにおいても定性的に良い結果が得られていることが確認できる。また、定量的な評価として、図-5に円の中心から半径 1.5m の円周上におけるポテンシャルをプロットし、厳密解と比較したものを示す。メッシュ (a),(b),(d) での結果が一致していたので右側の拡大図ではプロットの大きさを変えて表示している。この結果から、解析領域を厳密に表現できる IGA でも高精度な解を得るには要素の細分化を行う必要があるといえる。また、本解析では ξ 方向に対してノットの挿入を施しても結果に影響はなく、 η 方向に対してノットの挿入を行うと、より厳密解に近づき、ノットの挿入を二回行ったメッシュ (e) では、高精度な解を得られることが確認できた。講演時には三次元解析の結果も示す。

4. おわりに

本研究では IGA をポテンシャル流れ解析へ適用し、ノットの方法に関する解析メッシュの依存性について検討を行ったことで、以下の結論を得た。

- 解析領域を完全に表現できていても要素の細分化を行わないと精度の良い結果は得られない。
- ノットの挿入による要素の細分化では、高精度な解析を行うために適切な方向に対してノットを挿入する必要がある。

今後の課題として、より複雑な形状での解析があげられる。

参考文献

- 1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 2) J.A.Cottrell, T.J.R. Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.

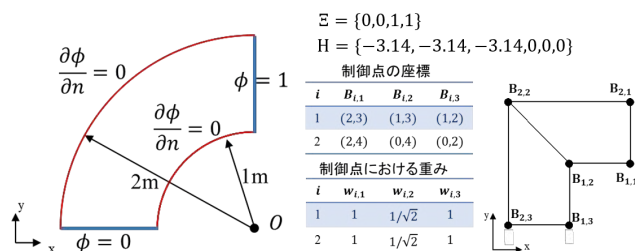


図-2 解析モデルと CAD データ

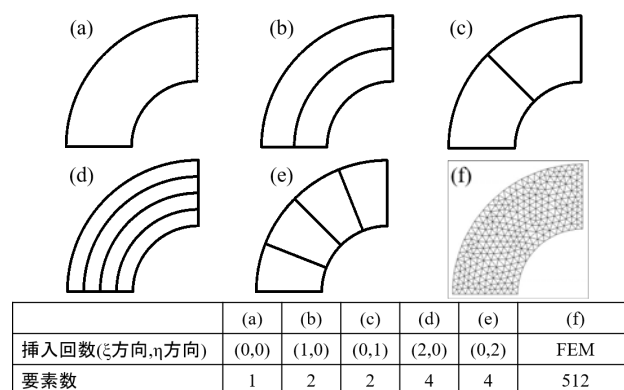


図-3 解析メッシュ

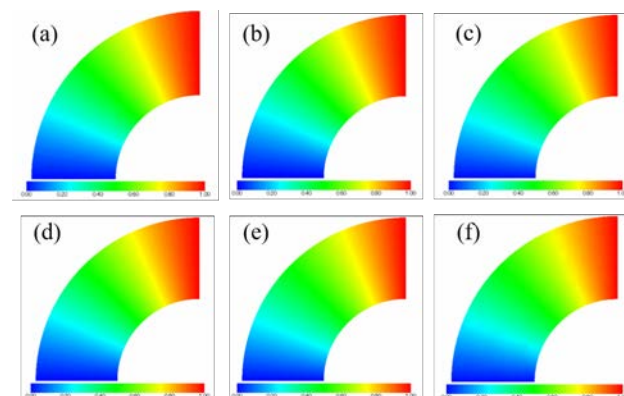


図-4 解析結果

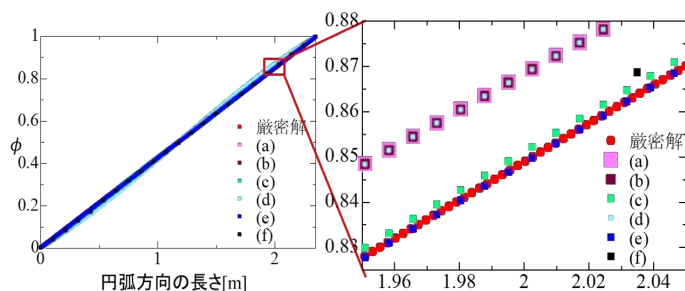


図-5 円の中心から半径 1.5m における円周上でのポテンシャル