

Space-Time 有限要素法による浅水長波流れ解析の精度検証

中央大学大学院 学生員 中村 光太郎
中央大学 正会員 榎山 和男

1. はじめに

移動境界問題に対して、高精度な解析が可能な手法として、ALE法とSpace-Time法¹⁾が挙げられる。著者らは、時間・空間領域に対し有限要素法により離散化を行うSpace-Time有限要素法に着目し、これまで浅水長波方程式に対する適用を行ってきた。²⁾³⁾

本報告では、Space-Time有限要素法を浅水長波方程式に適用し段波問題での解析を行った。また、時間方向に差分法を用いる手法との比較により、Space-Time有限要素法の精度検証を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として、以下のような浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}) = \mathbf{R} \quad (1)$$

各ベクトル、各マトリックスは以下ようになる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ u_1 H \\ u_2 H \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{u_1 H C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} - \frac{u_2 H C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \\ c^2 - u_1^2 & 0 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{11} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u_1 & 2 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{12} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{22} = \nu \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \\ -2u_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C_f = \frac{gn^2}{H^{\frac{1}{3}}}$$

図-1に示すような座標系を与えており、 H は全水深、 h は静水深、 η は水位変動量、 c は波速、 z は河床高さである。また、 \mathbf{U} は未知ベクトル、 \mathbf{R} は勾配、摩擦ベクトル、 \mathbf{A}_i は移流マトリックス、 \mathbf{K}_{ij} は拡散マトリックス、 u_i は各方向の流速、 g は重力加速度、 ν は渦動粘性係数、 n はマンシングの粗度係数である。

(2) Space-Time 有限要素法

Space-Time法は、空間と時間の双方に対して有限要素法を適用する手法であり、時間・空間領域(Space-Time slab)毎に独立に離散化を行う。Space-Time slabとは、図-2に示すように、時刻 t_n での空間領域 Ω_n と時刻 t_{n+1} での空

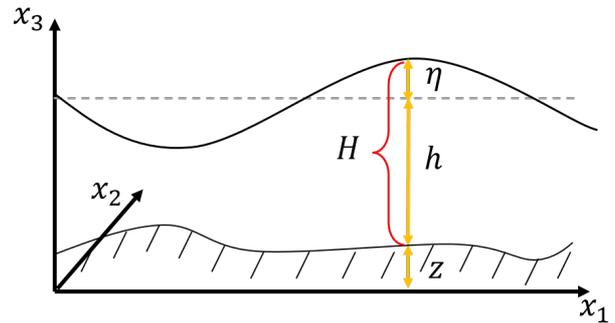


図-1 座標系と各変数

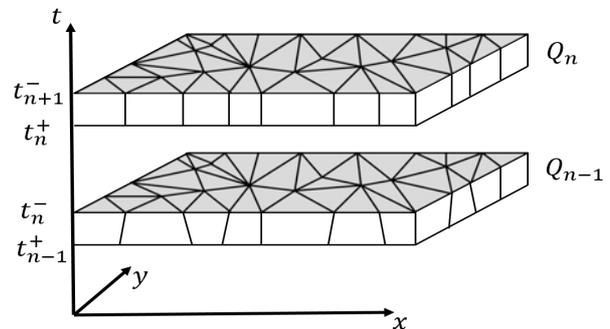


図-2 Space-Time slab

間領域 Ω_{n+1} を連結したものであり、ここで t_n^+ と t_{n+1}^- の±はslab内での上下を表している。その後、各々一つ前のSpace-Time slabの情報をもとにslab内での節点における未知量を求め、解き進んでいく方法である。このため時間刻み毎のメッシュ同士が幾何学的に連続である必要はない。

(3) 定式化

式(1)に対し、Space-Time slab毎に有限要素法の適用を行う。いま、 t_n^+ と t_{n+1}^- に囲まれた領域に着目して、時間方向の不連続量を含む形を考えると次式ようになる。

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \mathbf{U}^* \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) d\Omega dt$$

$$+ \int_{\Omega} (\mathbf{U}^*)_n^+ ((\mathbf{U})_n^+ - (\mathbf{U})_n^-) d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \tau \mathbf{A}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \mathbf{R} \right) d\Omega_e dt$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{R} d\Omega_e dt \quad (2)$$

KeyWords: 浅水長波方程式, Space-Time有限要素法, 段波問題

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: a16.jffy@g.chuo-u.ac.jp

ここに、左辺第1項は通常の Galerkin 項、第2項は時刻 $t = t_n$ における解の連続性を弱く要求するものであり、第3項は SUPG 法⁴⁾ による安定化に寄与する項である。また、第4項は衝撃捕捉項である。時刻 n での物理量の不連続面は、

$$(\phi^h)_n^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t_n \pm \varepsilon) \quad (3)$$

で表され、初期条件は以下のように定義する。

$$(\phi^h)_0^- = \phi_0 \quad (4)$$

ここで、 ϕ_0 は物理量 ϕ の初期値である。また、SUPG 項における安定化パラメータ τ は以下の関数を与える。 N_α は空間の補間関数を表す。

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|u\|}{\Delta h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\tau = \left(\frac{1}{(\tau_{SUGN1})^2} + \frac{1}{(\tau_{SUGN2})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} (c|\mathbf{j} \cdot \nabla N_\alpha| + |\mathbf{u} \cdot \nabla N_\alpha|) \right)^{-1}$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}$$

衝撃捕捉項における安定化パラメータ δ は以下に示すものを与える。

$$\delta = \tau_{SHOC} (\|\mathbf{u}_{int}\|)^2, \tau_{SHOC} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} |\mathbf{u} \cdot \nabla N_\alpha| \right)^{-1}$$

$$\|\mathbf{u}_{int}\| = \|\mathbf{u}\|$$

また、時間・空間共に一次で補間を行うと、未知関数、重み関数は以下ようになる。

$$\mathbf{U}(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_{np}} N_j(x_i) [\Theta_1(t) \mathbf{U}_j^{n+1} + \Theta_2(t) \mathbf{U}_j^n] \quad (6)$$

$$\mathbf{U}^*(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_{np}} N_j(x_i) [\Theta_1(t) (\mathbf{U}^*)_j^{n+1} + \Theta_2(t) (\mathbf{U}^*)_j^n] \quad (7)$$

ここで、 $N_j(x_i)$ は空間方向の補間関数、 n_{np} は Space-Time slab における節点数であり、この場合、二次元問題での Slab 要素は三角柱の形状となるため、 n_{np} は 6 ということになる。また、 Θ_1, Θ_2 は時間方向の補間関数であり、以下のようになる。

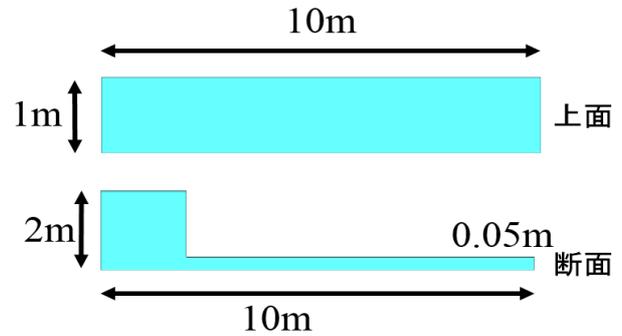


図-3 初期条件

$$\Theta_1(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t - t_n}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\Theta_2(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} \quad (9)$$

3. 数値解析例

数値解析例として段波問題を取り上げ、空間方向の離散化に SUPG 法を用いた安定化有限要素法、時間方向の離散化に差分法 (Crank-Nicolson 法) を用いた場合と、時間増分 Δt を変化させて比較を行う。

(1) 解析条件

初期条件として、図-3 で表されるような 2m の段波を与えた。解析メッシュは、分割幅 0.05 のユニオンジャックの構造格子メッシュである。時間増分 Δt はそれぞれ、0.001, 0.01, 0.1 の 3 パターンで比較を行う。また、境界条件は、境界の法線方向の流量が 0 になるような Slip 条件を与えた。

(2) 解析結果

解析結果は講演時に示す。

4. おわりに

本研究では、Space-Time 有限要素法を浅水長波方程式に適用し、Crank-Nicolson 法との比較を行うことで精度検証を行った。

参考文献

- 1) Thomas J.R., Hughes, Gregory M., Hulbert, Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 66, Issue 3, February 1988, Pages 339-363
- 2) 桜庭雅明, 櫻山和男, 菅野諭, 移動境界を考慮した Space-Time 有限要素法による浅水長波流れ解析, 応用力学論文集, 第 3 巻, pp.255-262, 2000.
- 3) 高瀬慎介, 田中聖三, 櫻山和男, AMR 法を用いた Space-Time 有限要素法による移動境界を有する浅水長波流れ解析, 応用力学論文集, 第 11 巻, pp.79-87, 2008.
- 4) 一般財団法人 日本計算工学会編, 第 3 版有限要素法による流れのシミュレーション OpenMP に基づく Fortran ソースコード付き, 丸善出版, pp.40-52, 2008.