# 二次元等方弾性体中における トポロジー最適化を用いた欠陥形状再構成

群馬大学大学院　学生会員　田代匡彦
○群馬大学　学生会員　山崎文也
群馬大学大学院　正会員　斎藤隆泰

## 1. はじめに

本研究では, 以下で述べるトポロジー最適化法を超音波を用いた定量的非破壊評価法へ応用するために, 等方弾性体中の欠陥形状再構成について考える. 超音波非破壊評価法では, 材料内部の欠陥を正しく再構成することが最終目的となる. そこで, 本研究では, 最適化手法の中で設計自由度が最も高いとされるトポロジー最適化を用いた定量的非破壊評価法を考える. ここに, トポロジー最適化では, 対象領域内部のトポロジーの変化に対する目的汎関数の変化率であるトポロジー感度 [1] を用いる. 本研究で考える非破壊評価では, 複数の観測点で得られる散乱波形データを用いて, 最適な等方弾性体中の欠陥の個数・位置・形状を決定することを考える. また, 欠陥が存在する散乱波動場の計算には, 演算子積分時間領域境界要素法 [2] を用いる. 数値解析例として, 二次元等方弾性体中の欠陥形状再構成結果を示し, 本手法の妥当性を示す.

## 2. 解くべき問題

本研究で対象とする超音波の送受信概要を図 1 に示す. 今, 境界 $\Gamma$ を持つ欠陥 $D$ が存在する可能性のある領域を $\Omega^\Gamma$ とし, 最適な欠陥の位置, 個数, 形状を決定する問題を考えれば, 解くべき問題は, 以下のような弾性波動場 $u_i^\Gamma$ および対応する表面力 $q_i^\Gamma$ に対する弾性波動散乱問題 (順問題) となる.

$$\mu u^\Gamma_{i,jj}(\boldsymbol{x},t) + (\lambda+\mu)u^\Gamma_{j,ji}(\boldsymbol{x},t) = \rho\ddot{u}^\Gamma_i(\boldsymbol{x},t) \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega^\Gamma, 0<t) \tag{1}$$

$$q_i^\Gamma(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad (\boldsymbol{x}\in\Gamma, 0<t) \tag{2}$$

$$u_i^\Gamma(\boldsymbol{x},0) = \dot{u}_i^\Gamma(\boldsymbol{x},0) = 0 \quad (\boldsymbol{x}\in\Omega^\Gamma) \tag{3}$$

ここで, $\mu, \lambda$ は Lamé 定数, $t$ は時間, $\rho$ は密度, $\dot{(\ )}$ は時間微分 $\partial/\partial t$ を表し, 散乱波は放射条件を満足するものとする. このとき, 領域 $\Omega^\Gamma$ に, 平面波を入射し, 適当な位置に欠陥が存在すると仮定した場合の観測境界 $S^{\rm obs}$ 上の観測点 $\boldsymbol{x}^m$ における弾性波動場 $u_i^\Gamma$ と実際の位置に欠陥が存在する場合の計測データ $u_i^{\Gamma,{\rm obs}}$(ただし, $0\le t\le T$ であり, $T$ は計測時間) の差である, 以下の目的汎関数 $J(\Omega^\Gamma)$ の最小化問題を考える.

$$J(\Omega^\Gamma) = \int_0^T\int_{S^{\rm obs}} |u_i^\Gamma(\boldsymbol{x}^m,t) - u_i^{\Gamma,{\rm obs}}(\boldsymbol{x}^m,t)|^2 dS_x dt \tag{4}$$

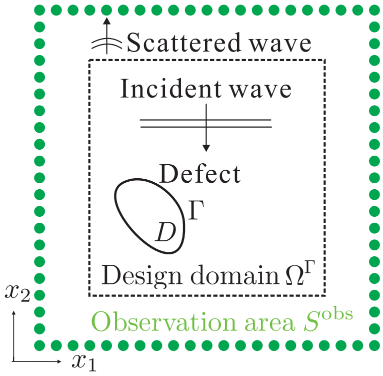


図 1 解くべき問題.

## 3. 等方弾性体中の弾性波動シミュレーション

式 (1)-(3) を解くために用いる, 無限等方弾性体中の空洞による入射平面波の波動散乱問題に対する時間領域境界積分方程式は, 弾性波動場 $u_i^\Gamma(\boldsymbol{x},t)$ に対して, 次の式で与えられる.

$$C_{ij}u_j^\Gamma(\boldsymbol{x},t) = u^{\Gamma,{\rm in}}(\boldsymbol{x},t) + \int_\Gamma G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*q_j^\Gamma(\boldsymbol{y},t)d\Gamma_y - \int_\Gamma S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)*u_j^\Gamma(\boldsymbol{y},t)d\Gamma_y \tag{5}$$

ここで, $C_{ij}$ は自由項, $G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t), S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は, それぞれ二次元弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核, $*$ は時間に関する畳込積分である. 式 (5) を解くために, 本研究では, 通常の時間領域境界要素法に比べて安定な演算子積分時間領域境界要素法 [2] (CQBEM : Convolution Quadrature Boundary Element Method) を用いる.

## 4. レベルセット法を用いたトポロジー最適化

本研究では, 式 (4) の最小化問題にトポロジー最適化を用いる. 一般的に, トポロジー最適化では, 対象領域内部のトポロジーの変化における目的汎関数の変化率として定義されるトポロジー感度を用いる. 本研究で用いるトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ は次の式で与えた.

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \Big(\hat{\sigma}_{ij}*(A_{ijkl}\sigma_{kl}) + \rho\dot{u}_i*\dot{\hat{u}}_i\Big)(\boldsymbol{x},T) \tag{6}$$

$$A_{ijkl} = \frac{1-\nu}{\mu}\left[(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{2(1+\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl}\right] \tag{7}$$

**Key Words:** 超音波非破壊評価法, 時間領域境界要素法, トポロジー最適化, レベルセット関数
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1

ここに, $\delta_{ik}$ は Kronecker のデルタ, $\hat{\sigma}_{ij}$ はトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ を解析的に解くために定義した随伴波動場の解 $\hat{u}_i$ に対する応力場であり, $\nu$ はポアソン比を表す. また, 欠陥の発生や消滅を含めた欠陥の位置や形状の更新のために以下のレベルセット法を用いる. 対象領域 $\Omega^\Gamma$ 内のレベルセット関数 $\phi$ の分布を考え, $\phi(\boldsymbol{x})=0$ となる等高線を欠陥 $D$ の境界 $\Gamma$ とする.

$$\begin{cases} 0<\phi(\boldsymbol{x})\leq 1 & \forall \boldsymbol{x}\in D \\ \phi(\boldsymbol{x})=0 & \forall \boldsymbol{x}\in \Gamma \\ -1\leq\phi(\boldsymbol{x})<0 & \forall \boldsymbol{x}\in \Omega^\Gamma\setminus D \end{cases} \tag{8}$$

また, 最適化ステップ毎に欠陥形状の更新を行うために仮想的な時間 $s$ を導入し, 次の式で与えられる, レベルセット関数 $\phi$ の時間発展方程式を解く.

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}(\boldsymbol{x},s)=-K\mathcal{T}(\boldsymbol{x},s)+\tau\Delta\phi(\boldsymbol{x},s) \tag{9}$$

ここで, $K,\tau$ はそれぞれ式 (9) を精度よく計算するための適当な定数である. したがって, 最適化ステップ毎に, 得られたトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ を用いて, 式 (9) を計算し, 得られた対象領域 $\Omega^\Gamma$ 内のレベルセット関数 $\phi$ の分布より, 最適な欠陥形状を決定する.

## 5. 数値解析例

### (1) 等方弾性体中の二次元弾性波動散乱解析 (順解析)

図 2(a) のような, $(-6a,-6a)$ を中心とする円筒空洞の欠陥 (半径 $a=0.5$) が存在するモデルに対して, $x_1$ 方向正の向きに伝搬する平面波を入射波として, 以下の式で与える.

$$u_1^{\Gamma,\mathrm{in}}(\boldsymbol{\xi},t)=\frac{u_0}{2}(1-\cos 2\pi\alpha) \tag{10}$$

$$\alpha=\begin{cases} \dfrac{c_L}{\lambda}\left(t-\dfrac{x_1+8a}{c_L}\right) & \text{for} \quad (0\leq\alpha\leq 1) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

ここに, $u_0$ は振幅を表す. 解析パラメータは, 振幅を $u_0=1.0$, 波長 $\lambda/a=1.0$ と与えた. また, 境界要素解析では, 空洞を 72 個の区分一定要素で離散化し, 総時間ステップ数 $N$ を $N$=128, 時間増分 $c_L\Delta t/a\simeq 0.3464$ で与えた. また, 縦波速度 $c_L$, 横波速度 $c_T$ の比 $c_L/c_T$ は $c_L/c_T=\sqrt{3}$ であり, ポアソン比 $\nu$ は $\nu=0.25$ とした.

### (2) トポロジー最適化を用いた欠陥形状再構成 (逆解析)

本研究では, 対象領域 $\Omega^\Gamma$ 内のレベルセット関数 $\phi$ の分布より, 欠陥の最適形状を決定した. 各最適化ステップにおけるレベルセット関数の分布を図 2 (b)-(e) に, 最終的に得られた最適な欠陥の個数・位置・形状を図 2(f) に示す. 図 2(b) に, 式 (9) の正則化項の安定性のため, 初期形状の中心で最大となる Gauss 分布を初期形状として与えた. 図 2(c)-(e) より, 初期形状として設定した実際の位置にない欠陥は, 最

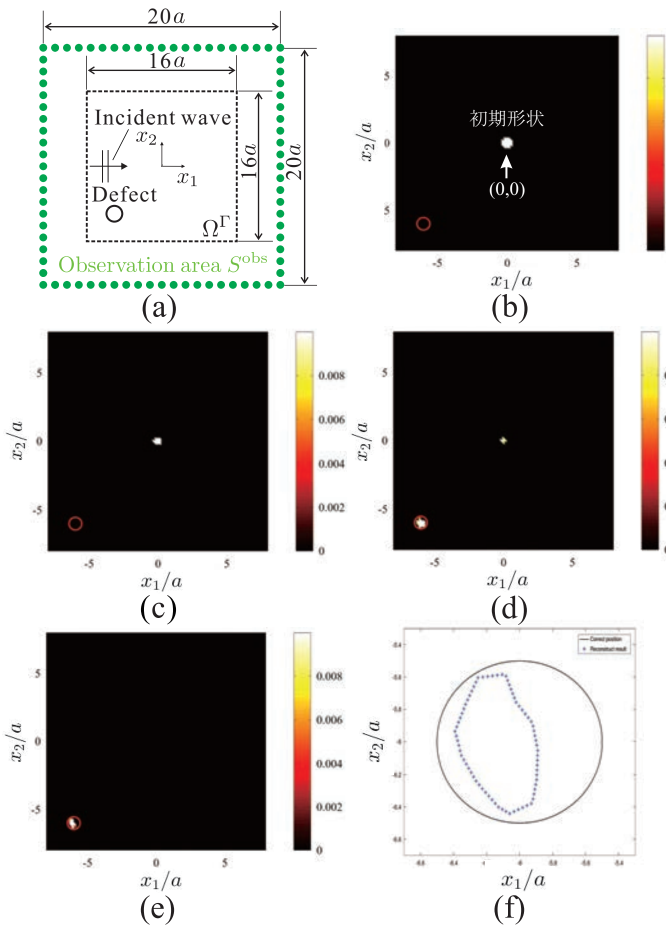


図 2 数値解析例 (a) 解析モデル (b) 欠陥の初期形状 (c)5step 目の欠陥形状 (d)10step 目の欠陥形状 (e) 最終 step 目の欠陥形状 (f) 最適な欠陥形状.

適化ステップが進むにつれて, 小さくなりやがて消滅する. また, 実際の欠陥位置に欠陥が生成され, 実際の欠陥の大きさ・形状へと近づいていくことが見て取れる. 図 2 (f) に得られた最適な欠陥形状を拡大した結果を示す. 黒線が実際の欠陥形状, 青分布が欠陥形状再構成結果を表す. 両者を比較した結果, 入射波を送信した左部分が概ね再構成されており, 本手法の妥当性が示せた. しかし, 右部分は, 十分な精度で決定出来ていない. このため, 欠陥形状再構成の精度の向上には, 異なる方向から入射波を入射したより多くの計測データが必要になると考えられる.

## 6. まとめと今後の課題

二次元等方弾性体中に存在する欠陥に対して, トポロジー最適化を用いた最適な欠陥の個数・位置・形状を決定した. 今後は, 異方性材料中の欠陥に対しての本手法の適用性について検討を行う予定である.

### 参考文献

1) M. Bonnet: Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain, *Comput. method appl. m.*, Vol.195, pp.5239-5254, (2006).

2) T. Saitoh and S. Hirose: Parallelized fast multipole BEM based on the convolution quadrature method for 3D wave propagation problems in time-domain, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol.10, 012242, (2010).