アイソジオメトリック解析におけるはり要素の基礎検討

日本大学理工学部　学生会員　○唐澤　奈央子
日本大学理工学部　　正会員　　　長谷部　寛

1. はじめに

土木構造物の有限要素解析においてはり要素などの構造要素が用いられる．代表的なはり要素の 1 つであるベルヌーイ・オイラーはり要素 [1]では形状関数に 3 次エルミート多項式を用いる．さらに，節点変数にたわみ角を含めて要素間のたわみ角の連続性を保持している．一方で，アイソジオメトリック解析 [2]で用いられる B-Spline や NURBS はC^{p-1}連続性を有する関数であり，1 つのセグメントの中に複数の要素が配置される．そのため，たわみ角を節点変数として有していなくても，2 次以上の基底関数を用いれば要素間でたわみ角の連続性が自動的に満足される．

NURBS によるはり要素に関するいくつかの論文 [3), 4)]では，はり要素の定式化が若干異なる．そのため土木構造物を対象とした解析において最適な定式化を模索する必要がある．本研究でははりの解析を対象に，たわみを 2 次以上の B-Spline 基底関数で表現して要素間でたわみ角の連続性が保持されるように離散化し，それにより得られた解と理論解との比較を行った．

2. B-Spline 曲線と基底関数

B-Spline 曲線$\mathbf{C}(\xi)$はコントロールポイントの座標値により構成される位置ベクトル$\mathbf{B}_i$と B-Spline 基底関数$N_i^p(\xi)$(式(2))の線形結合として式(1)で表される．

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_i^p(\xi)\mathbf{B}_i \tag{1}$$

・$p = 0$の場合

$$N_i^0(\xi) = \begin{cases} 1 \; (\; \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1}) \\ 0 \;\; otherwise \end{cases} \tag{2a}$$

・$p \ge 1$の場合

$$N_i^p(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_i^{p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(\xi) \tag{2b}$$

ここで，pは次数，iはコントロールポイントの番号，ξ_iはノットと呼ばれるパラメータであり，局所座標値である．

上記を考慮すると B-Spline 基底関数から構成できる 1 要素のたわみの近似関数は式(3)で表される．ここで，w_iはコントロールポイント変数である．例として基底関数の次数が 2 次の場合を式(4)に示す．

$$\mathrm{w}(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i^p(\xi) w_i \tag{3}$$

$$\mathrm{w}(\xi) = N_1^2(\xi)w_1 + N_2^2(\xi)w_2 + N_3^2(\xi)w_3 \tag{4}$$

3. 支配方程式

支配方程式にはベルヌーイ・オイラーはりの微分方程式を採用し(式(5))，弱形式化した後(式(6))，Galerkin 法に基づいて離散化した(式(7))．

$$EI\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q \tag{5}$$

$$EI\int_0^L \frac{d^2 w(x)}{dx^2}\frac{d^2 \widehat{w(x)}}{dx^2} dx = \int_0^L q\,\widehat{w(x)} dx \tag{6}$$

$$\mathbf{KW} = \mathbf{F} \tag{7}$$

ここに，$w(x)$はたわみ，$\widehat{w(x)}$は重み関数，$\mathbf{K}$は B-Spline 基底関数から計算される剛性行列，$\mathbf{W}$はコントロールポイントにおける未知変数ベクトル，$\mathbf{F}$は外力ベクトルである．

4. 解析条件

解析モデルと境界条件を**図-1** に示す．等分布荷重が作用する単純ばりを対象として，ヤング率は$E = 2.1 \times 10^{11}\ N/m^2$，断面 2 次モーメントは$I = 1/60000\ m^4$ とした．

要素数は 1 要素とし，基底関数の次数は 2 次～4 次の場合を検討した．次数と設定したノットベクトルを**表-1** に示す．

キーワード　アイソジオメトリック解析，　B-Spline 基底関数，はり要素，単純ばり
連絡先　〒101-8308　東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

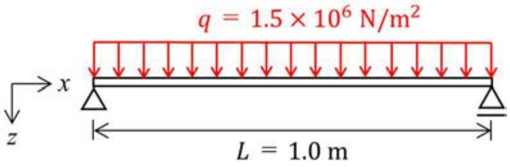

図-1 解析モデルと境界条件

表-1 次数とノットベクトル

次数p	ノットベクトルξ_i
2 次	{0,0,0,1,1,1}
3 次	{0,0,0,0,1,1,1,1}
4 次	{0,0,0,0,0,1,1,1,1,1}

5. 解析結果

方程式を解いて得られたコントロールポイント変数 w_i を**表-2** に示す．これらを式(3)に代入し，わみの関数を得た．その結果を**図-2** に示す．また，たわみの近似関数に$x = L/2$を代入してスパン中央でのたわみを求め，理論解との相対値を調べた結果を**表-3** に示す．2 次・3 次の場合はともに理論値に対して 80%の精度が得られ，4 次の場合は理論解と一致する結果が得られた，また，たわみ角の近似関数は式(3)を x で 1 階微分した式にコントロールポイント変数 w_i を代入して算出した．その結果を**図-3** に示す. たわみ, たわみ角ともに 2 次と 3 次は一致し，一方 4 次の場合は理論解と一致する分布が得られた．

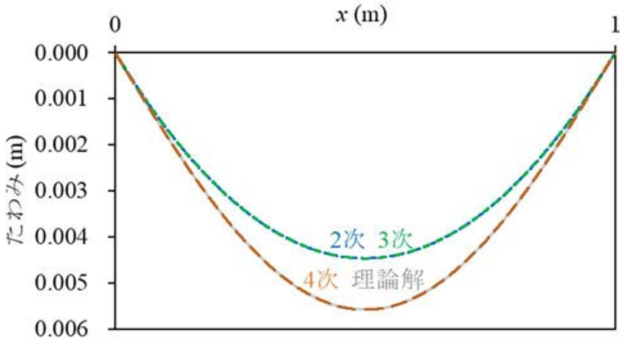

図-2 たわみの分布

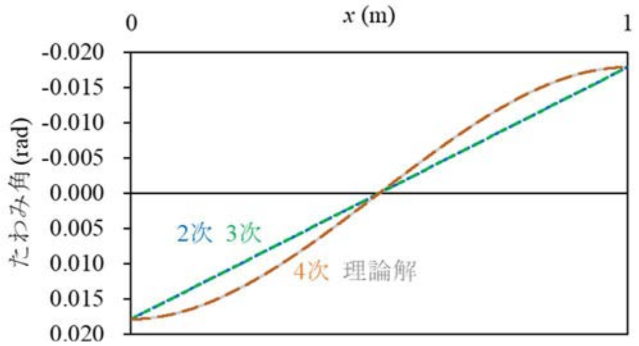

図-3 たわみ角の分布

表-2 コントロールポイント変数w_i

次数p	コントロールポイント変数w_i ($\times qL^4$ / EI)				
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
2 次	0	1/48	0		
3 次	0	1/72	1/72	0	
4 次	0	1/96	1/48	1/96	0

表-3 スパン中央のたわみの相対値

次数p	解析解/理論解
2 次	0.800
3 次	0.800
4 次	1.000

6. まとめ

等分布荷重が作用する単純ばりは理論解が 4 次で表されるため, 4 次の B-Spline 基底関数を用いれば，たわみ分布を表現できることを確認した．2 次・3 次の場合はスパン中央で 80%の精度となった． B-Spline 基底関数がC^{p-1}連続であるため，要素内の連続なたわみ角の分布を得ることができた．

今後の課題として，2 次と 3 次の場合について要素数を増やしたときの検討が必要である．

参考文献

1) 山田貴博：高性能有限要素法，丸善，2007

2) J.A.Cottrell, T.J. R. Hughes, Y.Bazilevs : Isogeometric Analysis-Toward Integration of CAD and FEA， Wiley, 2009

3) O.Weeger， U.Wever， B. Simeon ： Isogeometric analysis of nonlinear Euler–Bernoulli beam Vibrations, Nonlinear Dyn. 72， 813-835， 2013

4) A.M.Bauer, M. reitenberger, B. Philipp, R. Wuchner, K.-U.Bletzinger ： Nonlinear isogeometric spatial Bernoulli beam， Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg. 303， 101-127， 2016