

安定化有限要素法による東京湾の流れと水質解析

中央大学 学生員 ○ 家中 萌々子
中央大学大学院 学生員 中村 光太郎
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

東京オリンピックの開催が決定したことをきっかけに、近年首都圏周辺の水環境に再び注目が集まり、様々な調査が行われている。東京湾の水環境は、水質汚濁防止法が制定されてから著しく改善したものの、近年の COD 濃度の推移はほぼ横ばいとなっており、水環境の改善は停滞状況にあるといえる。そこで、河川から流入する汚染物質の拡散の様子を数値シミュレーションによって把握することで、現在の排水規制の妥当性の検証と今後の汚染状況の予測が可能になる。

本発表では、東京湾の流動性を浅水長波方程式を用いた有限要素法により再現し、河川から流入する COD の移流拡散現象について考察することを目的とする。

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式として、次に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(N_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) + \mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (1)$$

ここで、各ベクトル、各マトリックスは以下ようになる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} H \\ u_1 H \\ u_2 H \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ -c^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 \\ c^2 - u_1^2 & 0 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{11} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2u_1 & 2 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{12} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{21} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{22} = \nu_e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 \\ -2u_2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_f \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{H} \end{bmatrix}, C_f = \frac{gn^2}{H^{\frac{3}{2}}}$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は未知ベクトル、 $\mathbf{R}$ は勾配ベクトル、 $\mathbf{A}_i$ は移流行列、 $\mathbf{N}_{ij}$ は拡散行列、 $\mathbf{G}$ は摩擦行列、 H は全水深、 u_i は各方向の流速、 h は静水深、 c は波速、 z は河床高さ、 g は重力加速度、 ν_e は渦動粘性係数、 n はマンニングの粗度係数、 f はコリオリ係数、 $\mathbf{C}_f$ は摩擦係数、 $\mathbf{U}'$ はコリオリ行列である。コリオリ係数は、日本を北緯 35 度とした、 $f=0.8366 \times 10^{-4}$ を与える。

(2) 移流拡散方程式

物質の移流拡散現象を支配する移流拡散方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} + u_i \frac{\partial c_0}{\partial x_i} - k \frac{\partial^2 c_0}{\partial x_i^2} = f \quad (2)$$

ここで、 c_0 :濃度、 k :拡散係数、 f :発生項とする。

(3) 空間方向の離散化

空間の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法を用いる。式 (1) に重み付き残差法を適用すると以下のようにになる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{U}^* \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{G} \mathbf{U} + f \mathbf{U}' - \mathbf{R} \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(N_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\mathbf{A}_i)^T \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{G} \mathbf{U} + f \mathbf{U}' - \mathbf{R} \right) d\Omega_e$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) d\Omega_e = 0 \quad (3)$$

また、式 (2) にも同様に適用すると、以下のようにになる。

$$\int_{\Omega} c_0^* \cdot \left(\frac{\partial c_0}{\partial t} + u_i \frac{\partial c_0}{\partial x_i} - k \frac{\partial^2 c_0}{\partial x_i^2} \right) d\Omega$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau (\mathbf{A}_i)^T \left(\frac{\partial c_0^*}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial c_0}{\partial t} + u_i \frac{\partial c_0}{\partial x_i} \right) d\Omega_e = 0 \quad (4)$$

SUPG 項の安定化パラメータを以下のように与える。

$$\tau_{SUPG} = \left(\frac{1}{(\tau_{SUGN1})^2} + \frac{1}{(\tau_{SUGN2})^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{SUGN1} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} \left(c |\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_{\alpha}}| + |u_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_{\alpha}}| \right) \right)^{-1}$$

$$\tau_{SUGN2} = \frac{\Delta t}{2}$$

$$\delta = \tau_{SHOC} (||u_{\alpha int}||)^2, \tau_{SHOC} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n_{en}} |u_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_{\alpha}}| \right)^{-1}$$

$$||u_{\alpha int}|| = ||u_{\alpha}||$$

KeyWords: 安定化有限要素法, 移流拡散, 東京湾

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: a17.6hmr@g.chuo-u.ac.jp

ここで、 Δt は微小時間増分量、 N は形状関数である。

式 (3) の補間に三角形一次要素を用いると、以下の有限要素方程式が得られる。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\tau + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{S} + \mathbf{S}_\tau) \mathbf{U} + (\mathbf{H} + \mathbf{H}_\tau) \mathbf{R} + \mathbf{TU} + (\mathbf{F} + \mathbf{F}_\tau) \mathbf{U} = 0 \quad (5)$$

$\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{D}$ は分散ベクトル、 $\mathbf{U}$ は未知ベクトル、 $\mathbf{S}$ は移流行列、 $\mathbf{F}$ は摩擦行列、 $\mathbf{H}$ は勾配行列、 $\mathbf{R}$ は勾配ベクトル、 $\mathbf{F}$ はコリオリベクトル、添字 τ は SUPG 法に起因する行列で、 $\mathbf{T}$ は Shock-Capturing 項に起因する行列である。

また、式 (4) も同様に、有限要素方程式は以下のようになる。

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_\tau + \mathbf{D}) \dot{c}_0 + (\mathbf{S} + \mathbf{S}_\tau) c_0 + \mathbf{K} c_0 = 0 \quad (6)$$

(4) 有限要素方程式

時間方向の離散化には有限差分法を用いる。 $n + \theta$ ステップ ($0 \leq \theta \leq 1$) で式 (5) を満足することを考えると、以下の式が得られる。

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+\theta} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t}$$

$$\mathbf{U}^{n+\theta} = \theta \mathbf{U}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{U}^n$$

本報告では、 $\theta = 0.5$ の Crank-Nicolson 法で離散化を行う。

3. 数値解析例

図-1 の東京湾モデルの解析メッシュを用いて、東京湾での汚濁物質移流拡散解析を行う。

境界条件として、海岸部にノンスリップ条件、湾口 (図-2) に M2 分潮を想定した式-7 のような波高 η を与える。

$$\eta = A \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (7)$$

ここで、 $A=0.36\text{m}$ 、 $T=45720\text{s}$ とする。

また、江戸川・荒川・隅田川・多摩川の 4 つの河川の流入部には、東京都環境局の公共用水域水質測定結果を参考に、図-2 のような条件を図-3 に示した境界に与える。²⁾

時間増分量は 10.0s、解析時間は 2592000s(1 か月) とする。

4. おわりに

本発表では安定化有限要素法を用いた東京湾の COD の移流拡散解析を行う手法について示した。

計算結果は発表時に示す。

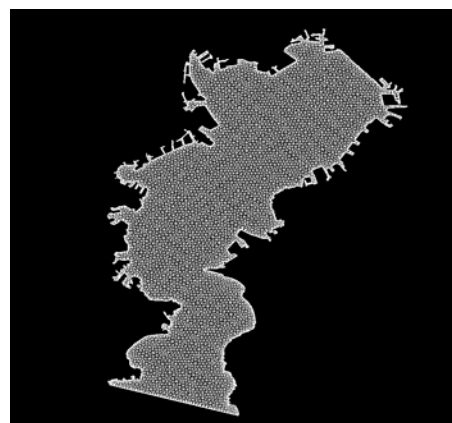


図-1 東京湾メッシュ

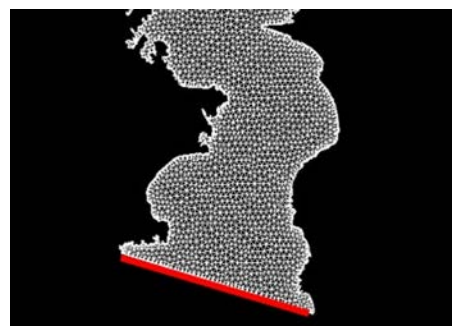


図-2 境界条件 (湾口)

	江戸川	荒川	隅田川	多摩川
流速(m/s)	0.06795	0.02516	0.00943	0.00142
COD(mg/L)	6.2	6.3	5.9	6.8

図-3 計算条件

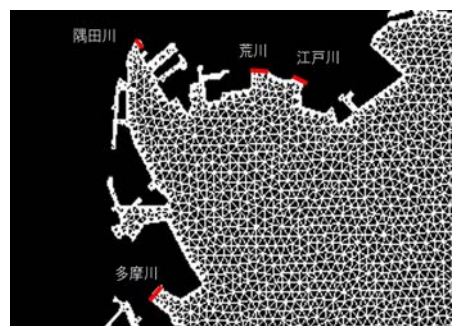


図-4 境界条件 (流入部)

参考文献

- 1) 日本計算工学流れの有限要素法研究委員会：続・有限要素法による流れのシミュレーション、シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社、pp.54-61,2012.
- 2) 東京都環境局 “公共用水域水質測定結果” 2020-2-14 https://www.kankyo.metro.tokyo.lg.jp/water/tokyo_bay/measurements/measurements/400300a20190925160017320.html(参照 2021 - 1 - 16)