

演算子積分時間領域境界要素法を用いた き裂による2次元粘弾性波動散乱解析

○群馬大学大学院 学生会員 鈴木悠介
群馬大学大学院 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

時間領域境界要素法は、波動問題に対する有効な数値解析手法として発展してきた。しかしながら、通常の時間領域境界要素法では、時間増分が小さい場合に数値解が不安定になることが知られている。また、分散性を有する波動問題を直接に解析することも難しい。このような中、演算子積分時間領域境界要素法が開発され、粘弾性体や飽和多孔質弾性波動問題中の空洞による散乱解析へ適用されてきた¹⁾。しかしながら、そのような分散性波動問題において、超特異積分核を必要とするき裂に対する散乱問題解析は殆ど行われていないのが現状である。そこで本研究では、著者らが開発した体積型欠陥に対する粘弾性波動解析を、き裂による散乱問題へと拡張する。簡単な数値解析例を示すことにより、本手法の妥当性について検討する。

2. 粘弾性体中のき裂による散乱問題に対する時間領域境界要素法の定式化

以下では、特に断りのない限り、添え字は1,2の値をとり、それらは総和規約に従うとする。まず、図1のような2次元無限粘弾性体 $\bar{D}$ 中のき裂による入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ の散乱問題を考える。図1のように、き裂の上下面 Γ^+ , Γ^- の接触を考慮しない線形なき裂を考慮した場合、すなわち、表面力成分 $t_i^\pm(\mathbf{x}, t)$ および、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ について、

$$t_i^\pm(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma^+, \Gamma^- \quad (1)$$

$$\phi_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \partial\Gamma \quad (2)$$

が成り立つ。ただし、右上添字の $\pm$ はそれぞれ、き裂の上下面での物理量を表し、 $\partial\Gamma$ はき裂の縁を表している。なお、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ は変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ に対し、 $\phi_i(\mathbf{x}, t) = u_i^+(\mathbf{x}, t) - u_i^-(\mathbf{x}, t)$ と定義している。以下では、正の側における法線 $\mathbf{n}^+$ や物理量等を特に断りのない限り、単に $\mathbf{n}$ 等と右上添字を省略して表記する。この問題の変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ に対する解は、き裂表面 Γ に対する、次の解の積分表現を解くことで求まる。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_j(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \quad (3)$$

ここで、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は2次元粘弾性波動問題における時間領域二重層核を表す。式(3)を微分し、領域内部の点 $\mathbf{x}$ をき

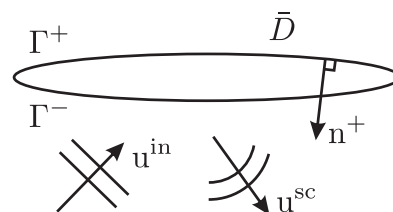


図1 粘弾性体中のき裂による入射波の散乱。

裂面に極限移行することにより、超特異核 $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ から成る次の超特異積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) &= - \int_{\Gamma} W_{pa}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_a(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \\ &= - n_b(\mathbf{x}) C_{pbik} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial y_l} U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) C_{cajl} n_c(\mathbf{y}) * \phi_a(\mathbf{y}, t) d\Gamma_y \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $t_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ に対応する表面力成分、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は2次元粘弾性波動問題における時間領域基本解、 $(\cdot)_{,k}$ は空間微分である。また、 C_{ijkl} は弾性定数を表す。式(4)に正則化を施し、整理すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) &= C_{pckl} n_c(\mathbf{x}) \left[- \rho \int_{\Gamma} U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \ddot{\phi}_i(\mathbf{y}, t) n_l(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right. \\ &\quad \left. + e_{3db} e_{3lj} \int_{\Gamma} C_{ijna} U_{nk,a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_{i,b}(\mathbf{y}, t) n_a(\mathbf{y}) d\Gamma_y \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 ρ は粘弾性体の密度、 $(\cdot)$ は時間微分、 e_{3jk} は交代記号を表す。式(5)を時間と空間に関して離散化することで、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ が求まれば、式(3)の解の積分表現を用いて領域 $\bar{D}$ 内における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。しかしながら、式(5)を時間に関して直接離散化し、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることは、冒頭で述べたように、数値解が不安定になる可能性がある。また、粘弾性波動問題では、閉じた形の時間領域基本解 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を求めることはできない。そこで、本研究では、式(5)に演算子積分法(CQM)²⁾を適用することで、時間に関する離散化を行う方策を取る。

3. 演算子積分法の適用

空間に関する離散化に M 個の一定要素を用いた選点法、

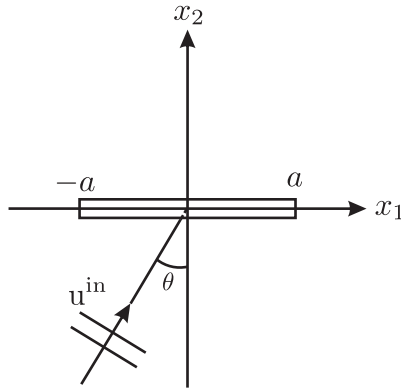


図2 数値解析モデル.

時間に関する離散化に前節で述べた CQM を総時間ステップ数 N として適用すれば, 表面力境界積分方程式 (5) は次のように表せる.

$$t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A_{pi}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) + B_{pi}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha)] \phi_i(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \quad (6)$$

ここで, $A_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $B_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は影響関数であり, CQM の適用により, それぞれ次のように表される.

$$\begin{aligned} A_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \rho n_c(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) \\ &\times \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[- \int_{\Gamma} C_{pckl}^*(s_l) \hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) d\Gamma_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (7) \\ B_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= n_c(\mathbf{x}) e_{3lj} \frac{R^{-m}}{L} \\ &\times \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\partial\Gamma} C_{pckl}^*(s_l) C_{ijna}^*(s_l) \frac{\partial}{\partial y_a} \hat{U}_{nk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) d\Gamma_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (8) \end{aligned}$$

ただし, $\hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ はラプラス変換域における 2 次元粘弾性波動問題の基本解である. また, R, L, s_l はラプラスパラメータに対応する CQM のパラメータであり, $s_l = \delta(z_l)/\Delta t$ で表される. 一方, 式 (8) における, 積分 $\int_{\partial\Gamma} d\Gamma_y$ は, α 番目の要素の縁 $\partial\Gamma$ に対する線積分を表しており, その導出にはストークスの定理を用いている. また, $C_{pckl}^*(s_l)$ は, 複素緩和弾性定数である. 以上より, 式 (6) について第 1 ステップから, 最終の第 $N-1$ ステップまで逐次計算を行うことにより, 各ステップにおける, き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる. き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ が求まれば, 式 (3) に CQM を適用することにより, 領域内部の変位場 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる.

4. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. ここでは, 無限粘弾性体中に存在する図 2 に示すような原点中心, 長さ $2a$ のき裂に対する入射波の散乱問題を考える. 入射波は文献³⁾における式 (42) の平面波一波を $\theta = 0^\circ$ で与えた. また, 緩和弾性係数

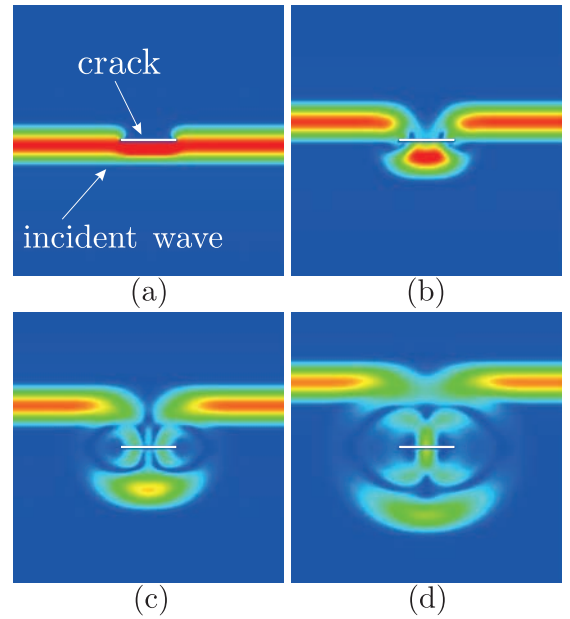


図3 き裂周辺の弾性波動場 $|u|$. (a) $cT_0\Delta t/a = 0.5$ (b) $cT_0\Delta t/a = 1.0$ (c) $cT_0\Delta t/a = 1.5$ (d) $cT_0\Delta t/a = 2.0$ の場合.

μ_R と初期弾性係数 μ_0 の比は $\mu_R/\mu_0 = 0.85$, 体積弾性係数 K と初期弾性係数 μ_0 の比は $K/\mu_0 = 5/3$, 応力緩和時間 τ_σ とひずみ緩和時間 τ_ϵ は, 入射平面波の周期 T_0 を用いてそれぞれ $\tau_\sigma = 0.5T_0$, $\tau_\epsilon = 17T_0/40$ で与えた. また, き裂は一定要素を用い 20 要素に分割をした. 時間ステップ数 $N = L = 128$, $\epsilon = 1.0 \times 10^{-10}$ とし, $\delta(z_l)$ を 2 次の後退差分式で与えた. 時間増分は $cT_0\Delta t/a \simeq 0.02$ として与え解析を行った. 図 3(a)-(d) は, それぞれ代表的な時刻におけるき裂周辺の粘弾性波動場 $|u|$ を示している. 図 3 より, x_2 方向に伝搬する入射波はき裂によって散乱され, き裂先端からの回折波を確認することができる. き裂前面では大きな散乱波を確認できる一方, き裂後方の変位場は小さい値を示している. 一方, 図 3(a)-(d) と時刻歴の順に入射平面波の振幅に着目すると, その最大値は徐々に小さくなっていることがわかる. すなわち, 演算子積分時間領域境界要素法で粘弾性効果を適切に導入することができたと考えられる.

5. おわりに

演算子積分時間領域境界要素法を用いて, 粘弾性体中のき裂に対する弾性波動散乱解析を行った. 今後は, 異方性の影響も考慮した異方性・粘弾性体に対する演算子積分時間領域境界要素法の開発や, 3 次元問題への拡張を行う予定である. また, H-matrix 法による高速化も検討する.

参考文献

- 1) 竹田晴彦, 斎藤隆泰: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた粘弾性体中の空洞に対する 3 次元順解析および逆散乱解析, 計算数理工学論文集, vol.20, pp.1-6, 2020.
- 2) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**, pp. 129-145, 1988.
- 3) 斎藤隆泰, 福井卓雄, 廣瀬壮一, 石田貴之: 粘弾性面内波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号 No.20080021, 2008.