

2次元移流拡散方程式へのSpace-Time有限要素法の適用

中央大学 学生員 ○ 中村 光太郎
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

移動境界問題に対して、高精度な解析が可能な手法として、ALE法とSpace-Time法が挙げられる。著者らは、時間・空間領域に対し有限要素法により離散化を行うSpace-Time有限要素法に着目し、これまで浅水長波方程式に対する適用を行ってきた。

本報告では、Space-Time有限要素法を2次元の移流拡散方程式に適用し、時間方向に差分法を用いる手法との比較により、Space-Time有限要素法の有効性を検討した。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

基礎方程式として、以下のような移流拡散方程式を用いる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 ϕ は未知関数、 u_i は*i*方向の移流速度、 k は拡散係数を表す。

(2) Space-Time有限要素法

有限要素法におけるSpace-Time法¹⁾²⁾は、空間と時間の双方に対して有限要素法を適用する手法であり、時間・空間領域(Space-Time slab)毎に独立に離散化を行う。Space-Time slabとは、図-1に示すように、時刻 t_n での空間領域 Ω_n と時刻 t_{n+1} での空間領域 Ω_{n+1} を連結したものであり、ここで t_n^+ と t_{n+1}^- での $\pm$ はslab内での上下を表している。その後、各々一つ前のSpace-Time slabの情報をもとにslab内での節点における未知量を求め、解き進んでいく方法である。このため時間刻み毎のメッシュ同士が幾何学的に連続である必要はない。

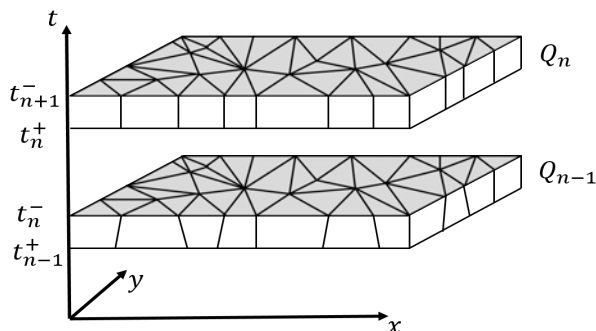


図-1 Space-Time slab

(3) 定式化

式(1)に対し、Space-Time slab毎に有限要素法の適用を行う。いま、 t_n^+ と t_{n+1}^- に囲まれた領域に着目して、時間方向の不連続量を含む形を考えると次式ようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} w^h \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} \right) + \left(k \frac{\partial w^h}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega dt \\ & + \int_{\Omega} w^h(t_n^+) (\phi^h(t_n^+) - \phi^h(t_n^-)) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_e} \tau u_j \left(\frac{\partial w^h}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi^h}{\partial x_i} \right) d\Omega_e dt = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、左辺第1項は通常のGalerkin項、第2項は時刻 $t = t_n$ における解の連続性を弱く要求するものであり、第3項はSUPG法³⁾による安定化に寄与する項である。時刻 n での物理量の不連続量は、

$$(\phi^h)_n^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t_n \pm \varepsilon) \quad (3)$$

で表され、初期条件は以下のように定義する。

$$(\phi^h)_0^- = \phi_0 \quad (4)$$

ここで、 ϕ_0 は物理量 ϕ の初期値である。また、SUPG項における安定化パラメータ τ は以下の関数を与える。 Δh は要素サイズを表す。

$$\tau = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|u\|}{\Delta h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

また、時間・空間共に一次で補間を行うと、未知関数、重み関数は以下ようになる。

$$\phi^h(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_{np}} N_j(x_i) [\Theta_1(t) \phi_j^h(t_{n+1}^-) + \Theta_2(t) \phi_j^h(t_n^+)] \quad (6)$$

$$w^h(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n_{np}} N_j(x_i) [\Theta_1(t) w_j^h(t_{n+1}^-) + \Theta_2(t) w_j^h(t_n^+)] \quad (7)$$

ここで、 $N_j(x_i)$ は空間方向の補関数、 np はSpace-Time slabにおける節点数であり、この場合、二次元問題であるため np は6ということになる。また、 Θ_1, Θ_2 は時間方向の補関数であり、以下ようになる。

$$\Theta_1(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t - t_n}{\Delta t} \quad (8)$$

$$\Theta_2(t) = \frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} \quad (9)$$

KeyWords: 移流拡散方程式, Space-Time有限要素法, コーン回転問題

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email: a16.jffy@g.chuo-u.ac.jp

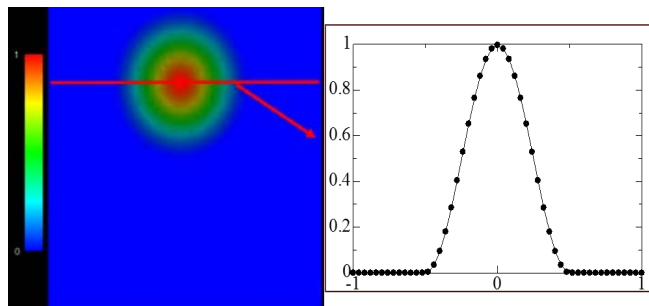


図-2 初期条件

3. 数値解析例

数値解析例として2次元移流問題であるコーン回転問題⁴⁾を取り上げ、空間方向の離散化にSUPG法を用いた有限要素法、時間方向の離散化に差分法(Crank-Nicolson法)を用いた場合との比較を行う。

(1) 解析条件

初期条件として、式(10)(図-2)で表されるものを初期形状として与えた。

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos(2\pi r) + 1) & (r \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (r > \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (10)$$

$$r^2 = x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$$

解析メッシュは領域 $-1 < x < 1, -1 < y < 1$ 、分割幅0.04のメッシュである。移流速度は原点を中心に回転する定常な移流速度場 $\mathbf{u}=(-x_2, x_1)$ を与えた。拡散係数 k は、厳密解との比較を行うため0とした。時間増分 Δt をそれぞれ変化させ、コーンが一周する解析を3パターンのクーラン数 ν で行った。また、境界条件は、境界で物理量 ϕ を0とした。

(2) 解析結果

差分法(Crank-Nicolson法)、Space-Time法でそれぞれ解析を行い、コーンの初期形状と一周後の形状を、各3パターンのクーラン数 ν で比較した。

a) クーラン数 $\nu \approx 0.7405$

解析結果を図-3に示す。クーラン数 $\nu \approx 0.7405$ での解析ではCrank-Nicolson法、Space-Time法共に、初期形状と定量的な一致を示し、両手法ともに精度良く解析が行えていることが分かる。

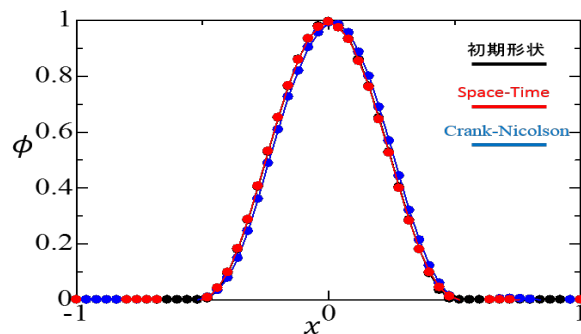
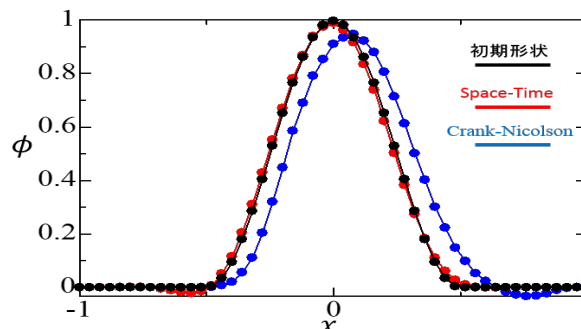
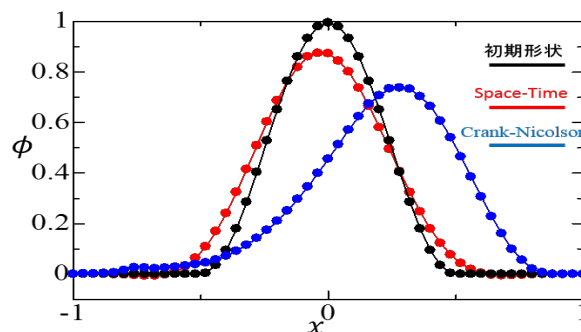
b) クーラン数 $\nu \approx 2.221$

解析結果を図-4に示す。Crank-Nicolson法では、初期形状と比べて位相の遅れと減衰が生じていることがわかる。それに対し、Space-Time法では初期形状と一周後の形状が定量的に一致していることが確認できる。

c) クーラン数 $\nu \approx 8.886$

解析結果を図-5に示す。Crank-Nicolson法では、位相の遅れと減衰が顕著になるが、Space-Time法では、その影響が小さいことが分かる。

以上の結果より、Space-Time法は時間方向に差分法(Crank-Nicolson法)を用いる手法に比べて高精度でかつ、時間増分量も大きく取れることが分かる。

図-3 クーラン数 $\nu \approx 0.7405$ 図-4 クーラン数 $\nu \approx 2.221$ 図-5 クーラン数 $\nu \approx 8.886$

4. おわりに

本研究では、Space-Time有限要素法を2次元の移流拡散方程式に適用し、以下の結論を得た。

Space-Time有限要素法は時間方向の安定性が高い手法であり、時間方向に差分法(Crank-Nicolson法)を用いる手法に比べて大きい時間増分量を用いても精度よく解析が行えることを確認した。また、SUPG法を適用することで移流の卓越による数値振動を抑えることができた。

今後の課題として、浅水長波方程式等への適用。また、アダプティブ法を用いた節点移動の導入などが挙げられる。

参考文献

- 1) 桜庭雅明, 櫻山和男, 菅野諭, 移動境界を考慮したSpace-Time有限要素法による浅水長波流れ解析, 応用力学論文集, 第3巻, pp.255-262, 2000.
- 2) 高瀬慎介, 田中聖三, 櫻山和男, AMR法を用いたSpace-Time有限要素法による移動境界を有する浅水長波流れ解析, 応用力学論文集, 第11巻, pp.79-87, 2008.
- 3) 一般財団法人 日本計算工学会編, 第3版有限要素法による流れのシミュレーション OpenMPに基づくFortranソースコード付き, 丸善出版, pp.40-52, 2008.
- 4) 日本計算工学会有限要素法研究委員会編, 続・有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・ジャパン, pp.58-61, 2008.