トポロジー感度と時間反転法を用いたき裂の検出

○群馬大学大学院理工学府　学生会員　石黒明日海
群馬大学大学院理工学府　正会員　斎藤隆泰

1. はじめに

構造物の維持管理を行う上で, 非破壊検査を行うことは重要である. 特に, 構造物内部の欠陥を非破壊評価する代表的な方法の一つとして, 超音波探傷法が知られている. また, 超音波探傷法による欠陥形状再構成に関する研究として, 開口合成法が挙げられる. しかし, 開口合成法は, 計測した受信波形の振幅を重みとして, 対応する空間位置にプロットしていく単純な手法である. ゆえに, 散乱波に含まれる欠陥の情報を使い切れているとは言えない. そのような理由から, 著者らは, Fink ら [1] によって提案された, 時間反転法を用いた欠陥形状再構成に関する研究を行ってきた. 時間反転法は, 波動場の相反性を利用して, 受信側で得られた複数の波形を時間反転させて, 材料内部に超音波を再入射し, それら再入射させた超音波の収束点を欠陥位置と捉える方法である. しかしながら, 時間反転法では, 再入射させた超音波の収束性を定量的に評価しなければならない. 著者らは, Bonnet[2] により提案された, 対象領域の微小な円空洞が発生した際のトポロジー変化に対する目的汎関数の変化率で定義されるトポロジー感度を時間反転法の欠陥検出指標に用いる方法について検討してきたが, 実用的にはき裂等の円空洞以外の欠陥に対しての適用性能も検討する必要がある. 以下では, 解くべき問題やトポロジー感度の定式化を説明した後, 内部欠陥がき裂である場合における欠陥形状再構成結果を示す. なお, 本研究は, 欠陥形状再構成への応用のための基礎研究として, 対象を面外波動場と単純化して, 欠陥形状再構成を行う. また, 散乱波動場の計算には, 有限要素法 (FEM) を用いる.

2. 解くべき問題

図 1 (a) のような, 欠陥の位置, 個数, 形状が不明である 2 次元等方性材料の内部領域における欠陥が存在し得る領域を Ω (Design domain) と仮定し, 欠陥の位置を決定する問題を考える. このとき, 以下のような面外波動場 u_3 を対象とした波動問題 (順問題) を考える.

$$\begin{cases} \mu u_{3,\alpha\alpha} = \rho \ddot{u}_3 & \text{(運動方程式)} \\ \sigma_{3\alpha} = \mu u_{3,\alpha} & \text{(構成式)} \end{cases} \tag{1}$$

ここで, μ はせん断弾性定数, $[\ ]_{,\alpha}$ は空間微分, ρ は密度, $\dot{[\ ]}$ は時間微分, $\sigma_{3\alpha}$ は応力を表す ($\alpha = 1, 2$). また, 領域 Ω に入射波 u_3^{in} を送信し, 欠陥が適当な位置に存在すると仮定した場合の仮想的な境界 S 上の観測点 $\boldsymbol{x}^m$ における面外波動場 $u_3(\boldsymbol{x}^m, t)$ と欠陥が実際の欠陥位置に存在する場合の計測データ $u_3^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m, t)$ (ただし, $0 \leq t \leq T$) の差である以下の目的汎関数 $J(\Omega)$ を導入する. また, 超音波の計測時間は T とする.

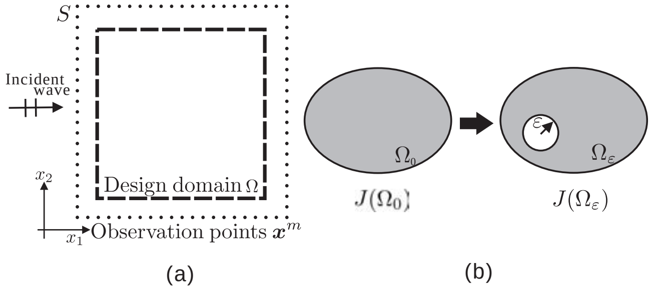

図 1 散乱体決定解析 (a) Design domain (b) トポロジー感度.

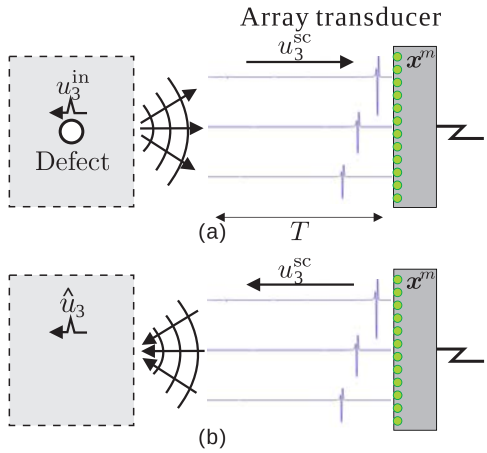

図 2 時間反転法概要 (a) 順解析 (b) 時間反転解析.

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \int_0^T \varphi(u_3(\boldsymbol{x}^m, t), \boldsymbol{x}^m, t) dt \tag{2}$$

$$\varphi(u_3(\boldsymbol{x}^m, t), \boldsymbol{x}^m, t) = |u_3(\boldsymbol{x}^m, t) - u_3^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m, t)|^2 \tag{3}$$

ここで, M は観測点の総数である. 本研究では, 以下の章で説明する, 目的汎関数より導出されるトポロジー感度を用いて欠陥形状再構成を行う.

3. 時間反転法とトポロジー感度

時間反転法は, 波動伝搬の相反性・可逆性を利用した方法である. 図 2 (a) に示すように, 入射波 u_3^{in} が欠陥に到達して散乱され, 散乱波が M 個のアレイ素子上の各点 $\boldsymbol{x}^m$ で計測されるとする. その後, 図 2 (b) に示すように散乱波 u_3^{sc} を時間反転させてアレイ素子から領域 Ω 内部に再入射させる. ここで, 波動場は時間について可逆であるから, それぞれの素子から送信された時間反転波 $\hat{u}_3$ は, 時刻 T 後には欠陥位置で最大値をとることとなり, おおよその欠陥位置

Key Words: 有限要素法, 時間反転法, トポロジー感度, き裂
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1

を特定できる. このように時間反転法は, 各素子からの時間反転波の収束位置により, 欠陥位置を特定する手法となっているが, 単に時間反転波を再入射させただけでは, 欠陥位置を定量的に特定できたとは言えない. そこで, 本研究では, トポロジー感度を欠陥検出指標に用いる. トポロジー感度とは, 図 1 (b) のような, 対象領域 Ω 内部の内点 $\boldsymbol{x}$ に新たな無限小の空洞 (半径 ε) が発生した時の目的汎関数 $J(\Omega_\varepsilon)$ の変化率を, 発生した空洞の面積で除した形で定義され, 次式で与えられる.

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(\Omega_\varepsilon) - J(\Omega_0)}{\pi \varepsilon^2} \tag{4}$$

式 (4) より, 実際の欠陥位置 $\boldsymbol{x}$ のトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ は, 目的汎関数が減少する方向 ($J(\Omega_\varepsilon) < J(\Omega_0)$) より, 必ず負であり, 大きな値をもつと考えられる. また, 式 (2) - (4) より, 欠陥を空洞と仮定した場合のトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ は以下の式で与えられる.

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \left(\nabla u_3 * (\boldsymbol{A} \nabla \hat{u}_3) + \frac{1}{c^2} \dot{u}_3 * \dot{\hat{u}}_3\right)(\boldsymbol{x}, t) \tag{5}$$

$$A_{ik} = 2\delta_{ik} \tag{6}$$

ここに, $\hat{u}_3$ はトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ を解析的に解くために定義した時間反転波動場の解であり, $*$ は畳込み積分, c は面外波の波速, δ_{ik} は Kronecker のデルタである. なお, 時間反転波動場の入射波 $\hat{u}_3^{\rm in}$ は, 観測点 $\boldsymbol{x}^m$ での順問題の解 u_3 と欠陥が存在する時の計測データ $u_3^{\rm obs}$ の差を振幅とし, 観測点を波源とする点源波を逆伝搬させたものである. なお, 実際の超音波非破壊評価では, 通常, 内部の欠陥を事前に空洞か, き裂か等, 判断することはできない. そのため, 実用的には, 空洞に対するトポロジー感度を用いたとしても, き裂を検出できることが望ましい. ゆえに, 以下の数値解析では, 式 (5), (6) の空洞に対するトポロジー感度を用いて, き裂を再構成することを主眼に置く.

4. 数値解析結果

解析モデルは, 図 3 (a) に示す通りであり, 解析領域左下に原点を取る. 散乱体であるき裂は, (49.9 [mm], 6.3 [mm]) を中心とした長さ 5.0 [mm] の直線き裂とする. ただし, 本解析では簡単のため, き裂をスリットで表現している. 探触子は実務を想定し, 16ch のリニアアレイ探触子とした.

(1) 有限要素法を用いた順解析及び時間反転解析結果

式 (3) より, 欠陥形状再構成では, 欠陥が実際の位置に存在する場合の計測データ $u_3^{\rm obs}$ が必要となる. そのため, まず順解析により, 解析領域内における面外波動場や観測点 $\boldsymbol{x}^m$ における受信波形を求める. 解析パラメータは, 時間増分 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-9}$ [s], 波速 $c = 3130$ [m/s], 密度 $\rho = 2700$ [kg/m^3], 入射波は図 3 (a) に対して, リニアアレイ探触子の ch1 (左端) に以下の式で与え, 周波数は $f = 2.0$ [MHz] とした.

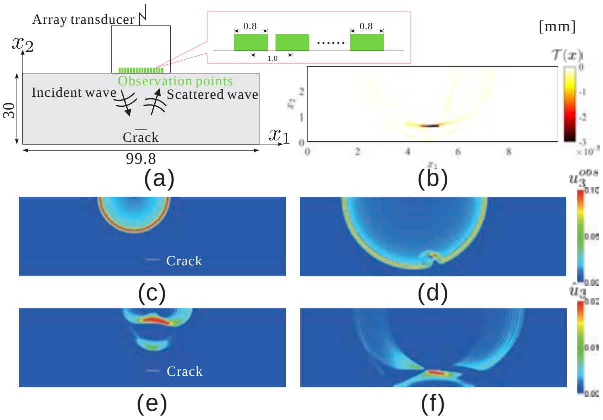

図 3 き裂の欠陥形状再構成 (a) 解析モデル (b) 欠陥形状再構成結果 (c), (d) 順解析 ($t = 4.375$ [μs], $t = 8.75$ [μs]) (e), (f) 逆解析 ($t = 6.0$ [μs], $t = 12.125$ [μs]).

$$u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t) = 1 - \cos 2\pi\alpha \tag{7}$$

$$\alpha = \begin{cases} ft & \text{for} \quad (t \leq \frac{1}{f}) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

図 3 (c), (d) は順解析, 図 3 (e), (f) は逆解析 (時間反転解析) における代表的ないくつかの時間ステップにおける面外波動場を示している. なお, 参考のため, き裂の位置を白線で示してある. 図 3 (c), (d) より, 順解析において ch1 からの入射波とき裂からの散乱波を確認できる. また, 図 3 (e), (f) より, 逆解析において時間反転波が, き裂位置付近に収束している様子を確認できる.

(2) 欠陥形状再構成

図 3 (a) のような解析領域に対して, 最適な欠陥形状再構成結果を示す. 本研究では, この種の研究に対する第一段階として, 適当な位置に欠陥を仮定せず, 欠陥が存在していない対象領域 Ω に対して順解析と逆解析を行い, 解 $u_3(\boldsymbol{x}, t), \hat{u}_3(\boldsymbol{x}, t)$ を求め, 式 (5) のトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ により, 欠陥形状再構成問題へ帰着させた. 解析領域内部の全内点でのトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ を求めた結果を図 3 (b) に示す. 参考のため, 実際のき裂位置を黒線で示してある. 図 3 (b) より, トポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ は, き裂周辺で大きな負の値を示していることが見てとれる. 以上より, 解析領域内部のき裂の位置を正しく決定できており, 本手法の妥当性が示せた.

5. おわりに

本研究で用いたトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ を定義したのち, 欠陥形状再構成を行った. 数値解析結果より, 本手法のき裂に対する適用性能を検証した. 今後は, 複数欠陥や異方性材料に対する欠陥形状再構成を行う予定である.

参考文献

1) M.Fink: Time reversal of ultrasonic fields - Part I: Basic principles, *IEEE t. ultrason. ferr.*, Vol.39, No.5, pp.555-566, 1992.
2) M.Bonnet: Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.195, pp.5239-5254, 2006.