

FDTD法を用いたマイクロポーラー弾性体中の 2次元弾性波動解析

群馬大学 理工学部 学生会員 鈴木悠介
群馬大学 大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学 環境・社会理工学院 正会員 廣瀬壮一

1. はじめに

材料中の微視構造や局所回転まで考慮した連続体理論は、一般連続体理論と呼ばれている。その一般連続体理論の一つである、マイクロポーラー弾性論は、古くから研究されてきた。一般的に、静的な問題においては、解析領域が微視構造に比べて十分大きい場合、偶応力は無視できる。しかしながら、動的な問題において、弾性波の波長が微視構造と同程度の場合は、偶応力を無視できず、マイクロポーラー弾性体の理論を取り入れる必要があると言われている。しかしながら、マイクロポーラー弾性体中の波動問題はこれまでほとんど行われていないのが現状である。そこで本研究では、マイクロポーラー弾性波動解析の手始めに、FDTD法を用いた解析を実施する。以下では、マイクロポーラー弾性論の基礎式、FDTD法解析における定式化について述べた後、数値解析結果を示すことで、本手法の妥当性を検討する。最後に今後のまとめについて述べる。

2. マイクロポーラー弾性体の弾性波動問題

線形マイクロポーラー弾性論における、運動方程式、変位-ひずみ関係式、構成関係式は、弾性体が等方であるとき、次のように表される¹⁾。

1) 応力に関する基礎式

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{ijk} \phi_k \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) \epsilon_{ij} + \mu e_{jki} \quad (3)$$

2) 偶応力に関する基礎式

$$m_{ji,j} + e_{ijk} \sigma_{jk} + l_i = \rho j \ddot{\phi}_i \quad (4)$$

$$\psi_{ij} = \phi_{j,i} \quad (5)$$

$$m_{ij} = \alpha \psi_{kk} \delta_{ij} + \beta \psi_{ji} + \gamma \psi_{ij} \quad (6)$$

ここで、 u_i 、 ϕ_i はそれぞれ変位および微視回転（マイクロローテーション）、 b_i 、 l_i は物体力および物体偶力、 ϵ_{ij} 、 ψ_{ij} はマイクロポーラーひずみおよび微視回転勾配、 σ_{ij} 、 m_{ij} は偶力および偶応力であり、 ρ は密度、 j はマイクロ慣性モーメント、 λ 、 μ 、 κ 、 α 、 β 、 γ はマイクロポーラー弾性定数である。また、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 e_{ijk} は交代記号である。

マイクロポーラー弾性体を対象とした面内波動問題では縦波、横波に加え横回転波の3種類が現れる。本研究では、マイクロポーラー弾性波動の伝搬挙動の解明のため、次式で述べるFDTD法²⁾を用いて解析を実施する。

3. FDTD法の定式化

FDTD法とは運動方程式および構成関係式を時間領域差分方程式に離散化することで解析領域全体の応力や粒子速度を求めていく手法である。FDTD法における偶力および偶応力の運動方程式および構成関係式は、 $x-z$ 面内で工学表記を用いる場合、次のように表される。

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \kappa + \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \kappa + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \kappa & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \mu + \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} - \dot{\phi}_2 \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\rho j \frac{\partial}{\partial t} \dot{\phi}_2 = \frac{\partial m_{12}}{\partial x} + \frac{\partial m_{32}}{\partial z} - \sigma_{13} + \sigma_{31} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{32} \end{bmatrix} = 4GN^2 l^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\phi}_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{\phi}_2}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $(\dot{})$ は時間微分、 u および w は x 軸方向および z 軸方向の変位を表す。また G はせん断弾性係数、 l は材料の微小構造の代表長である。なお N は連成数と呼ばれ、マイクロポーラー特性の強度を表す無次元定数である。これら3つの係数はそれぞれ次のように表される。

$$G = \frac{2\mu + \kappa}{2}, \quad l^2 = \frac{\gamma(\mu + \kappa)}{\kappa(2\mu + \kappa)}, \quad N^2 = \frac{\kappa}{2(\mu + \kappa)} \quad (11)$$

特に、連成数 N は $0 \leq N \leq 1$ の範囲にあり、 N が0に近づくとき古典弾性論に、1に近づくとき偶応力理論に漸近する。なお、マイクロポーラー弾性論では0と1の間のある値をとる。ここで、例えば式(7)の第1式、式(8)の第1式を離散化すると、それぞれ次の式(12)、(13)を得る。

$$\begin{aligned} & \rho \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \{ \dot{u}^{n+1}(i, k) - \dot{u}^n(i, k) \} \\ &= \left\{ \sigma_{11}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, k \right) - \sigma_{11}^{n+\frac{1}{2}} \left(i - \frac{1}{2}, k \right) \right\} \\ &+ \left\{ \sigma_{31}^{n+\frac{1}{2}} \left(i, k + \frac{1}{2} \right) - \sigma_{31}^{n+\frac{1}{2}} \left(i, k - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \left\{ \sigma_{11}^{n+\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, k \right) - \sigma_{11}^{n-\frac{1}{2}} \left(i + \frac{1}{2}, k \right) \right\} \\ &= (2\mu + \kappa + \lambda) \{ \dot{u}^n(i+1, k) - \dot{u}^n(i, k) \} \\ &+ \lambda \left\{ \dot{w}^n \left(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) - \dot{w}^n \left(i + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Key Words: マイクロポーラー弾性論, FDTD法, 2次元マイクロポーラー弾性波動解析

〒376-8515 群馬県桐生市天神町1-5-1 群馬大学 理工学部 TEL. 0277-30-1610 FAX. 0277-30-1610

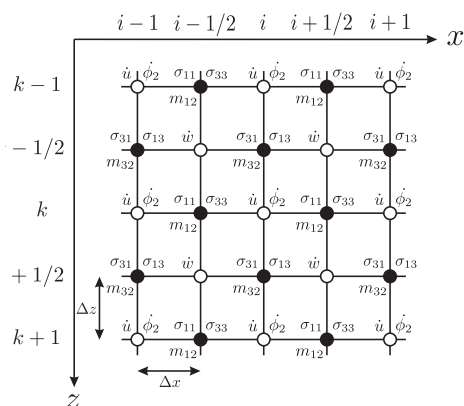


図1 FDTD法における2次元格子点配置。

ここで、 n は時間ステップ、 i, k は2次元格子上で、それぞれ x, z 方向の格子点番号を示している。また、 $\Delta x, \Delta z$ はそれぞれ x および z 方向の空間離散間隔（ただし、 $\Delta d = \Delta x = \Delta z$ ）、 Δt は時間離散間隔を表す。

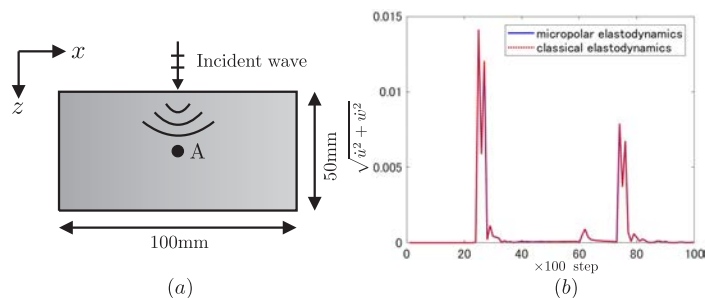
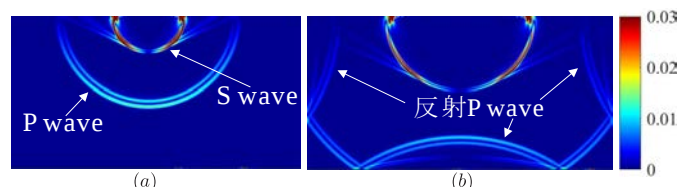
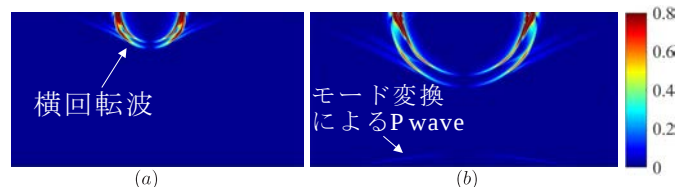
解析領域に対する差分格子の配置と対応する変数の例を図1に示す。式(12)、(13)をそれぞれ時間と空間に関して交互に計算することによって、各時間ステップにおける応力 σ_{11} と粒子速度 $\dot{u}$ を求めることができる。その他の変数 $\dot{w}$ 、 σ_{33} 、 σ_{31} 、 σ_{13} 、 $\dot{\phi}$ 、 m_{12} 、 m_{32} についても同様である。

4. 数値解析結果

以下、数値解析結果を示す。解析モデルは図2(a)のような幅100mm、高さ50mmのマイクロポーラー弾性体とした。入射波は周波数 $f=2\text{MHz}$ の正弦波とし、試験体上部中央から入射するものとする。解析で用いたパラメータは総時間ステップ数 $n = 20000$ 、格子点間隔 $\Delta d = 4.2 \times 10^{-5}[\text{m}]$ 、時間増分 $\Delta t = 1.4 \times 10^{-9}[\text{s}]$ とした。材料定数は、それぞれ密度 $\rho = 2190[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、マイクロ慣性モーメント $j = 1.96 \times 10^{-6}[\text{m}^2]$ とした。またマイクロポーラー弾性定数は、それぞれ $\lambda = 7.59 \times 10^{10}[\text{N}/\text{m}^2]$ 、 $\mu = 1.89 \times 10^{10}[\text{N}/\text{m}^2]$ 、 $\kappa = 1.49 \times 10^8[\text{N}/\text{m}^2]$ 、 $\gamma = 2.68 \times 10^4[\text{N}]$ とし、文献³⁾を参考に設定した。

まず、本解析精度を確認するために、連成数 $N = 0$ としマイクロポーラー弾性論を古典弾性論に帰着させて得られた数値解と古典弾性論により得られた数値解との比較を行った。ただし、古典弾性論における計算もFDTD法を用いている。解析結果を図2(b)に示す。図2(b)は、図2(a)の中央に位置するA点での変位 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{w}^2}$ の時間変化を示している。両者の結果は概ね一致しており、解析結果は妥当であると言える。なお、横回転波に関する変数である微視回転は古典弾性論では明らかに求まらないため、本論文では横回転波についての精度確認は行っていない。

次に図2(a)の解析モデルで $N = 0.06$ とした場合のマイクロポーラー解析結果を図3および図4に示す。ただし、その他のパラメータは先の解析と同じである。図3は弾性波動場の変位 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{w}^2}$ を、図4は横回転波の弾性波動解

図2 (a) 解析モデル、(b)A点での変位 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{w}^2}$ の時間変化。図3 弾性波動場 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{w}^2}$ の可視化結果 (a)3000step, (b)6000step.図4 横回転波の $\dot{\phi}$ の絶対値の可視化結果 (a)3000step, (b)6000step.

析結果を示しており、微視回転の時間微分 $\dot{\phi}$ の絶対値 $|\dot{\phi}|$ を可視化している。図3および図4より試験体上部中央から弾性波が入射され、時間と共に縦波、横波および横回転波が同心円状に伝搬していく様子が見て取れる。また図3(b)より境界からの反射波の伝搬が見て取れる。一方、図4(b)では横回転波が底面に達する前に、図3(b)の縦波に類似した波が底面から現れていることが確認できる。これはモード変換によるものであり、縦波の波動エネルギーの一部が横回転波に変換されたものだと考えられる。以上より、定性的ではあるが、マイクロポーラー等方弾性体中の波動伝搬現象を再現できたと言える。

5. まとめと今後の課題

FDTD法を用いたマイクロポーラー弾性体に対する2次元弾性波動解析を行い、縦波、横波および横回転波の可視化を行った。今後は、FDTD法と比べて、自由反射境界や異種材料界面等の境界条件がより明確なEFITを用いて、さらなる高精度化を目指す。また時間領域境界要素法を用いた場合の定式化も試み、差分法の解析結果と比較をすることで、両者の解析結果の妥当性を検討する予定である。

参考文献

- 1) 小林昭一編著:波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (1999)
- 2) 佐藤雅弘著:FDTD法による弾性振動・波動の解析入門, 森北出版株式会社, (2003)
- 3) V. Kaliraman and R. K. Poonia:Elastic wave propagation at imperfect boundary of micropolar elastic solid and fluid saturated porous solid half-space, Journal of solid mechanics, Vol 10(3),(2018),pp.655-671.