

# 演算子積分時間領域境界要素法を用いた 3次元粘弾性波動解析

○群馬大学 理工学部 学生会員 竹田 晴彦  
群馬大学 大学院理工学府 正会員 斎藤 隆泰

## 1. はじめに

演算子積分時間領域境界要素法は、従来の時間領域境界要素法では解析できない閉じた基本解を求めることができない問題をも解析できる方法として、これまで2次元粘弾性面外<sup>1)</sup>・面内<sup>2)</sup>波動問題、飽和多孔質弾性波動問題等に適用されてきた。しかしながら、3次元外部粘弾性波動解析はこれまでほとんど行われていないのが現状である。そこで、本研究では、3次元粘弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化を行う。後に、簡単に空洞による粘弾性波動の散乱解析結果を示すことで、本手法の有効性等について確認する。

## 2. 3次元粘弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化

今、図1で表されるような線形粘弾性波動問題の3次元領域  $D$  内における  $\bar{D}$  による散乱問題を考える。入射波  $u_i^{\text{in}}$  は、散乱体  $\bar{D}$  の境界表面  $S$  により反射・散乱されるとする。このとき入射波が散乱体  $\bar{D}$  に到達するまで静かな過去を持つとする。すなわち、初期条件  $u_i(\mathbf{x}, t=0) = 0$  および  $\partial u_i(\mathbf{x}, t=0)/\partial t = 0$  を考慮すれば、変位  $u_i$  および表面力  $t_i$  に関して、支配方程式および境界条件は次のように表される。

$$\mu(t) * \dot{u}_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + \left( K(t) + \frac{1}{3}\mu(t) \right) * \dot{u}_{j,ij}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{in } D \quad (1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_1, \quad t_i = \bar{t}_i \quad \text{on } S_2,$$

$$S_2 = S \setminus S_1 \quad (2)$$

ただし、 $\rho$  は密度、 $\mu(t)$ 、 $K(t)$  はそれぞれ、せん断弾性係数、体積弾性係数に対する緩和関数を表し、不遡及の公理  $\mu(t) = 0$ 、 $-\infty < t < 0$  を満足するものとする。また、 $*$  は畳込み積分を表し、 $(\cdot)$  および  $(\cdot)_i$  はそれぞれ、時間および空間に関する微分  $\partial/\partial t$ 、 $\partial/\partial x_i$  を表す。さらに、 $\bar{u}_i$  および  $\bar{t}_i$  は与えられた境界条件である。

ここで、一般に線形粘弾性波動問題に対しては解析的に閉じた基本解を得られないが、仮に基本解が与えられるとすると、式(1)、(2)により定義された初期値・境界値問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる。

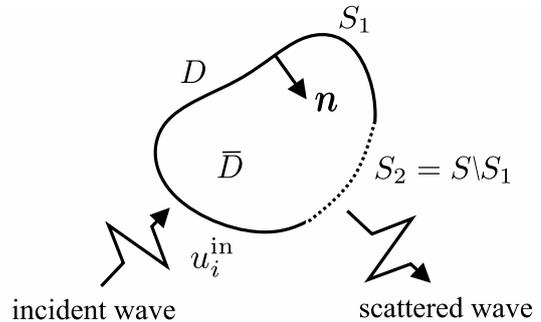


図1 解くべき問題。

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (3)$$

ただし、式(3)において、 $C_{ij}$  は自由項であり、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  および  $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  は3次元粘弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である。

次に、境界積分方程式(3)に対し、演算子積分法を適用する。式(3)を  $M$  個の一定要素で離散化し、滑らかな境界  $S$  に対して  $\mathbf{x} \in D \rightarrow \mathbf{x} \in S$  なる極限移行を考慮すれば、時間増分  $\Delta t$  に対して、次の第  $n$  ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる。

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(k\Delta t)] \quad (4)$$

ただし、式(4)において、 $\mathbf{y}^\alpha$  は  $\alpha$  番目の代表点を表し、 $u_j^\alpha(k\Delta t)$ 、 $t_j^\alpha(k\Delta t)$  は、それぞれ第  $k$  ステップにおける要素の代表点  $\mathbf{y}^\alpha$  での変位および表面力成分を表す。また、 $A_{ij}^m$ 、 $B_{ij}^m$  は影響関数であり、演算子積分法のパラメータ  $\mathcal{R}$ 、 $L$ 、 $\delta(z_l)$  を用いて、それぞれ次のように表すことができる。

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (5)$$

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (6)$$

ただし、 $s_l$  は  $s_l = \delta(z_l)/\Delta t$  で定義され、その  $\delta(z_l)$  は線形マルクスステップ法(差分法)における生成多項式の商である。

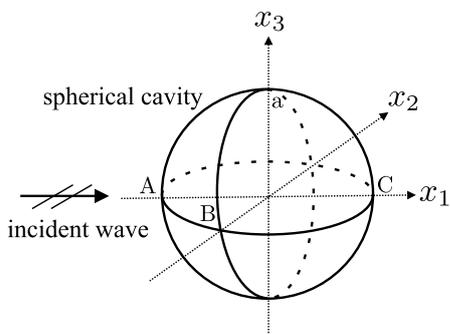


図2 半径  $a$  の空洞に対する粘弾性体中の散乱解析モデル。

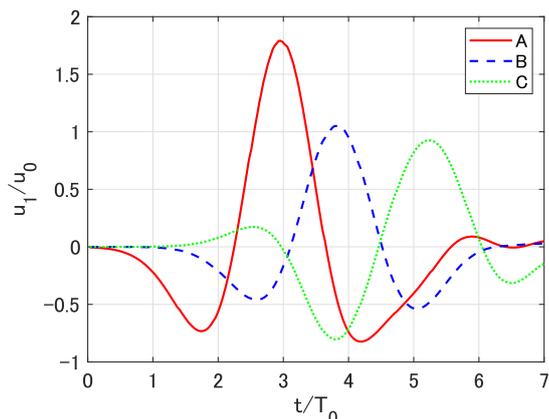


図3 境界点 A, B, C における  $u_1/u_0$  の時刻歴応答。

また,  $\mathcal{R}, L$  は目標とする精度  $\epsilon$  との関係  $\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon}$  により決定するパラメータである。  $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  および  $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は 3次元粘弾性波動問題におけるラプラス変換域での基本解および対応する二重層核である。

今, ラプラス変換域においては, 3次元粘弾性波動問題における基本解は解析的に閉じた形で得ることができるため, 式(4)において, 第  $n$  ステップ以前の境界値  $u_i, t_i$  が全て求まっていれば, 第  $n$  ステップにおける境界未知量を逐次的に計算することができる。

### 3. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す。本解析で用いる粘弾性モデルは三要素標準モデルである。三要素標準モデルにおいて, その複素せん断弾性係数はラプラス変換域では次のように表せる。

$$\mu^*(s) = \mu_R \frac{1 + s\tau_\sigma}{1 + s\tau_\epsilon} \quad (7)$$

ただし,  $\tau_\sigma$  および  $\tau_\epsilon$  はそれぞれ応力緩和時間, ひずみ緩和時間であり,  $\mu_R$  は緩和せん断弾性係数である。なお, 本解析ではせん断弾性係数のみに粘弾性効果を考慮した。

解析モデルの一例を図2に示す。図2に示すような半径  $a$  の空洞に対する3次元粘弾性波動の散乱問題を考える。空洞は四角形要素, 384分割に離散化し, 総ステップ数  $N = L = 256$ ,  $\epsilon = 10^{-10}$  を想定し, 時間増分を  $c_{L0}\Delta t/a = 0.0611$  として計算した。また, 粘弾性のパラメータとして緩和せ

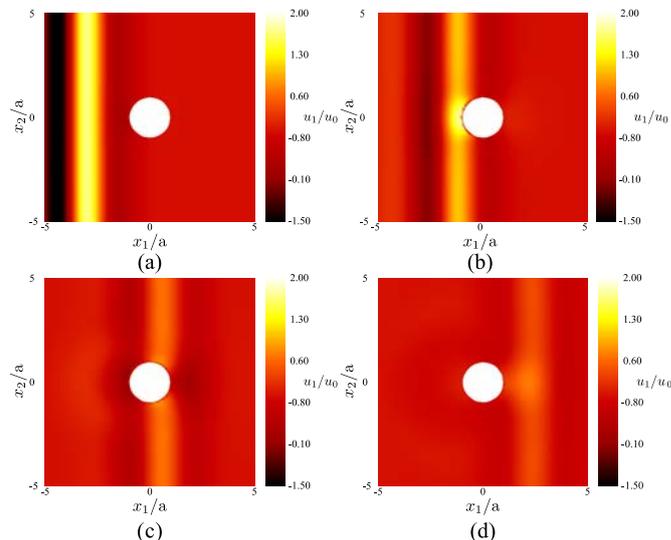


図4  $x_1 - x_2$  断面での粘弾性波動解析結果。(a)  $t/T_0 = 1.47$ , (b)  $t/T_0 = 2.93$ , (c)  $t/T_0 = 4.40$ , (d)  $t/T_0 = 5.99$

ん断弾性係数と初期せん断弾性係数の比を  $\mu_R/\mu_0 = 0.5$ , 体積弾性係数と初期せん断弾性係数の比を  $K/\mu_0 = 1$ , 初期弾性縦波速度  $c_{L0}$  の波が1つの空洞を通過する時間を  $T_0 = 2a/c_{L0}$ ,  $\tau_\sigma = T_0$ ,  $\tau_\epsilon = 0.5T_0$  とした。なお, 入射波として Ricker 波の波形を持った平面縦波を粘弾性体用に修正したものを用いる。今, 入射波の中心周波数に対応する時間パラメータを  $t_0 = T_0$ , 位相のずれを  $t_s = 3T_0$  とし, Fourier 変換を  $\mathcal{F}$  とすると, 入射波は次式で与えられる。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 \delta_{i1} \mathcal{F}^{-1} \left[ 2t_0 \sqrt{\pi} \left( \frac{\omega t_0}{2} \right)^2 e^{-\left( \frac{\omega t_0}{2} \right)^2} e^{i(k_L x_1 + \omega t_s)} \right] \quad (8)$$

ここで,  $u_0$  は変位振幅,  $\omega$  は角周波数,  $k_L$  は縦波の波数である。図3は図2中の A, B, C における全変位の時刻歴応答を示している。B, C 点では, A 点に比べて, 粘弾性の効果を確認できる。図4(a) - (d) に,  $x_1 - x_2$  断面での全変位場を示す。なお, 図中の白抜きの部分は空洞を表していることに注意されたい。時間の経過につれ, 入射波自体も減衰し, 粘弾性の効果が表れていることを確認できる。

### 4. まとめと今後の課題

本論文では, 演算子時間領域境界要素法を用いて, 時間領域の基本解を閉じた形で求めることができない3次元外部粘弾性波動解析における定式化を行った。空洞に対する散乱解析を行い, 妥当性を示した。今後は, さらに異方性の影響を考慮すること, 高速多重極法を適用することで, 計算効率を向上させることを行う予定である。

#### 参考文献

- 1) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壯一: 粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号 No.20080011, 2008
- 2) 斎藤隆泰・福井卓雄・廣瀬壯一・石田貴之: 粘弾性面内波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号 No.2008002, 2008