二次元ポテンシャル流れ問題へのIGAの適用について

中央大学 学生員 ○ 吉田 也真都
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

土木分野において流体ー構造連成解析に関する研究は盛んに行われており，その解析手法の一つとしてCADで描かれた構造物の曲線形状を完全に表現できるIGA(Isogeometric Analysis)が近年注目を浴びている．

本発表ではCADで曲線や曲面の表現で用いられるNURBSを用いて二次元ポテンシャル流れ問題にIGAを適用し，FEMの解析結果との比較を行う．

2. 数値解析手法

(1) NURBS

まず，NURBSについて述べる前にB-Spline基底関数について述べる．B-Spline基底関数は式(1)より決定される関数である．

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \qquad (p=0)$$

$$\begin{aligned} N_{i,p}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) \\ &\quad + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \ \ (p = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，iは制御点の番号，pはB-Spline基底関数の次数，ξはノットを表す．ノットとはB-Spline基底関数を決定するパラメータで，そのノットの並び，$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+p+1}\}$をノットベクトルという．このノットベクトルは単調増加する数列である．式(1)を用いてIGAで解析領域を表現するNURBS曲面，形状関数となるNURBS基底関数はそれぞれ式(2)，式(3)のように表される．

$$\mathbf{S}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\mathbf{B}_{i,j} \tag{2}$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^{n}\sum_{\hat{j}=1}^{m} N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \tag{3}$$

ここで，$\mathbf{B}$は制御点，wは各制御点に与えられる重みを表す．

(2) 定式化

二次元ポテンシャル問題におけるIGAの定式化について記す．

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial x_i^2} = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi_e}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_e^*}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \phi_e^* q \, d\Gamma \right\} = 0 \tag{5}$$

解析の手順は従来のFEMと同様で，式(4)に示した支配方程式であるLaplace方程式に対して重み付き残差法を適用して式(5)を導き，各要素において形状関数を用いてポテンシャルと重み関数を補間し，係数行列を求め，連立一次方程式を解くことでポテンシャルを求める．従来のFEMと異なる点としては，自由度を持つのが制御点であること，要素がノットの非ゼロ区間によって定義されること，形状関数に式(3)で示したNURBS基底関数を用いることがあげられる．

ある要素のポテンシャルϕ_e^hと重み関数ϕ_e^{*h}はNURBS基底関数を補間関数として次のように表される．

$$\phi_e^h = \sum_{I=1}^{n_{cp}} R_I(\xi,\eta)\phi_I \tag{6}$$

$$\phi_e^{*h} = \sum_{I=1}^{n_{cp}} R_I(\xi,\eta)\phi_I^* \tag{7}$$

ここで，n_{cp}はある要素が持つ制御点の数，ϕ_I, ϕ_I^*は制御点におけるポテンシャルと重み関数を表す．Iは式(2)で示した制御点の添え字i, jをまとめて表している．式(5)において一つの要素に着目し，式(6)，式(7)を代入すると式(8)のようになる．

$$\phi_{eI}^* \int_{\Omega_e} \frac{\partial R_I}{\partial x_i}\frac{\partial R_J}{\partial x_i} d\Omega \phi_{eJ} + \phi_{eI}^* \int_{\Gamma_e} R_I q d\Gamma = 0 \tag{8}$$

ここで，IGAにおいては形状関数であるNURBS基底関数がノット(ξ,η)から決定される関数であるので，物理空間$\Omega_e(x,y)$からパラメータ空間$\tilde{\Omega}_e(\xi,\eta)$へ変数変換を行う必要がある．その後，積分を行うためにパラメータ空間$\tilde{\Omega}_e(\xi,\eta)$から親要素$\bar{\Omega}_e(\bar{\xi},\bar{\eta})$へ変数変換を行い，親要素上で積分を行うことで係数行列を求めていく[3]．物理空間，パラメータ空間，親要素の関係を図-1に示す．

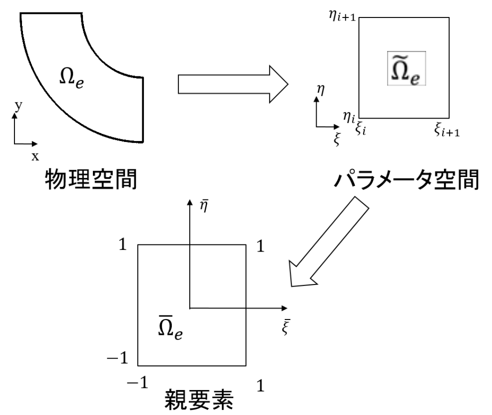
まず，物理空間からパラメータ空間へ変数変換を行うと式(8)の第一項は式(9)のようになる．

$$\begin{aligned} &\phi_{eI}^* \int_{\tilde{\Omega}_e} \left(\frac{\partial R_I}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial R_I}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) \\ &\qquad \left(\frac{\partial R_J}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial R_J}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) |J_1| \, d\tilde{\Omega}\phi_{eJ} \end{aligned} \tag{9}$$

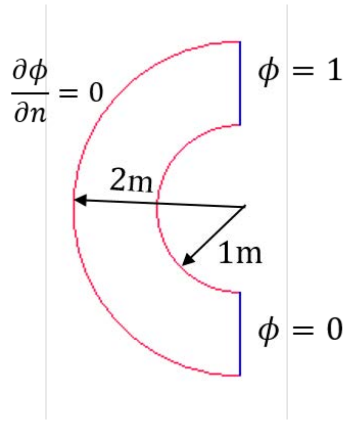
ここで，$|J_1|$はヤコビアンであり式(10)に示す通りである．

$$|J_1| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{10}$$

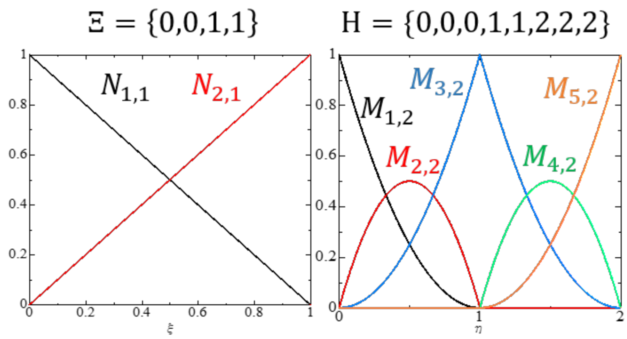
KeyWords： IGA，NURBS，ポテンシャル流れ
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日1-13-27 TEL. 03-3817-1815 Email：a16.yhft@g.chuo-u.ac.jp



図－１　IGA における変数変換



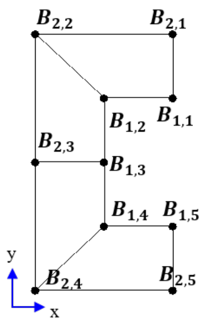
図－２　解析領域



図－３　ノットベクトルと NURBS 基底関数

i	$B_{i,1}$	$B_{i,2}$	$B_{i,3}$	$B_{i,4}$	$B_{i,5}$
1	(2,3)	(1,3)	(1,2)	(1,1)	(2,1)
2	(2,4)	(0,4)	(0,2)	(0,0)	(2,0)

i	$w_{i,1}$	$w_{i,2}$	$w_{i,3}$	$w_{i,4}$	$w_{i,5}$
1	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1
2	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1



図－４　コントロールネットと重み

次にパラメータ空間から親要素に変数変換を行うと式 (9) は式 (11) のようになる．

$$\phi^*_{eI}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial R_I}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\partial R_I}{\partial\bar{\eta}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\eta}}\right)$$
$$\left(\frac{\partial R_J}{\partial\bar{\xi}}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial\bar{\xi}}+\frac{\partial R_J}{\partial\bar{\eta}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\eta}}\right)|J_1||J_2|\,d\bar{\xi}d\bar{\eta}\phi_{eJ} \tag{11}$$

ここで，$|J_2|$ は式 (12) に示す通りである．

$$|J_2| = \left|\frac{1}{4}(\xi_{i+1}-\xi_i)(\eta_{j+1}-\eta_j)\right| \tag{12}$$

このようにして導かれた式 (11) は解析的な積分が困難であるため数値積分で求め，係数行列を作成する．数値積分には以下に示す Gauss の求積法を用いる．

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(\bar{\xi},\bar{\eta})d\bar{\xi}d\bar{\eta} = \sum_{i=1}^{gn}\sum_{j=1}^{gn}F(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_j)w_iw_j \tag{13}$$

ここで，F は被積分関数で式 (11) に示した関数，gn は積分点数，$\bar{\xi}_i$，$\bar{\eta}_j$ は積分点，w は積分点にかかる重みを表す．

3. 数値解析例

数値解析例として，二次元ポテンシャル流れ問題を取り上げ FEM との比較を行う．

(1) 解析条件

解析領域は図-1 に示す半円の解析領域で，境界条件として半円の上側直線部分に $\phi = 1$，下側直線部分に $\phi = 0$，の Dirichlet 境界条件を，曲線部分に関しては $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ の Neumann 境界条件を定める．NURBS 曲面で図-2 に示した解析領域を表現するためのノットベクトルと NURBS 基底関数を図-3 に，制御点とそれらにかかる重み，制御点を結んでできるコントロールネットを図-4 に示す．

(2) 解析結果

IGA の解析結果，並びに FEM の解析結果との比較の考察は発表時に示す．

4. おわりに

本発表では IGA を二次元ポテンシャル問題へ適用し，FEM との比較を行った．

今後は流体ー構造連成解析への適用について検討を行う予定である．

参考文献

1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis： CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
2) J.A.Cottrell, T.J.R Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis： Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.
3) V.Agrawal and S.S.Gautam, IGA：A simplified introduction and implementation details for finite element users, Journal of The Institution of Engineers (India)：Series C, Vol.100, pp.561-585, 2019.